



*Л. И. Антонов,  
Л. Г. Деденко,  
А. Н. Матвеев*

**МЕТОДИКА  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ПО ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ**

*Л. И. Антонов,  
Л. Г. Деденко,  
А. Н. Матвеев*

# *МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ*

Под общей редакцией  
проф. *А. Н. Матвеева*

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
1982

**Антонов Л. И. и др.** Методика решения задач по электричеству / Л. И. Антонов, Л. Г. Деденко, А. Н. Матвеев; Под общей ред. А. Н. Матвеева.—М.: Изд-во МГУ, 1982.—168 с.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов по овладению методами решения задач. Даны классификация задач всех разделов курса электричества по типам, подробные решения типовых задач и вопросы, позволяющие проконтролировать усвоение методов решения задач данного типа.

Рассчитано на студентов университетов и вузов.  
Ил. 67.

Рецензенты:

докт. физ.-мат. наук *А. Ф. Александров*,  
канд. физ.-мат. наук *В. К. Петерсон*

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Московского университета*

Лев Иванович Антонов,  
Леонид Григорьевич Деденко,  
Алексей Николаевич Матвеев

#### МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРИЧЕСТВУ

Редактор *С. И. Зеленский*  
Мл. редактор *О. Е. Силантьева*  
Художественный редактор *Л. В. Мухина*  
Обложка художника *Н. Н. Сенько*  
Технический редактор *К. С. Чистякова*  
Корректоры *М. И. Эльмус, С. Ф. Будаева*

Тематический план 1982 г. № 128  
ИБ № 1248

Сдано в набор 21.07.81 Подписано к печати 25.06.81  
Л-90584 Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub> Бумага тип. № 3.  
Гарнитура литературная Высокая печать  
Усл. печ. л. 8,82 Уч.-изд. л. 7,75 Зак. 189  
Тираж 25000 экз. Изд. № 1754 Цена 40 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство  
Московского университета.  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.  
Типография ордена «Знак Почета»  
издательства МГУ.  
Москва, Ленинские горы

А 1704040000—015  
077(02)—82 128—82

© Издательство Московского университета, 1982 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие и методические указания . . . . .	4
Раздел I. Элементарные заряды в вакууме и телах. Электромагнитные силы. Контактные явления (А. Н. Матвеев) . . . . .	6
Раздел II. Электростатическое поле заданного распределения электрических зарядов в пустоте (Л. И. Антонов) . . . . .	15
Раздел III. Электростатика проводников (Л. И. Антонов)	53
Раздел IV. Электростатика диэлектриков (Л. И. Антонов)	62
Раздел V. Магнитное поле стационарного тока в пустоте (Л. И. Антонов) . . . . .	73
Раздел VI. Магнетостатика магнетиков (Л. И. Антонов)	84
Раздел VII. Постоянный электрический ток (Л. Г. Деденко) . . . . .	93
Раздел VIII. Переменные токи и квазистационарные электромагнитные поля (Л. Г. Деденко) . . . . .	105
Раздел IX. Излучение электромагнитных волн (Л. Г. Деденко) . . . . .	129
Раздел X. Распространение электромагнитных волн (Л. Г. Деденко) . . . . .	133
Раздел XI. Электропроводность (Л. Г. Деденко)	144
Раздел XII. Преобразование электромагнитных полей (А. Н. Матвеев) . . . . .	160

## ПРЕДИСЛОВИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

В настоящее время в системе университетского образования теоретический материал сообщается в основном в лекционных курсах, умение решать задачи отрабатывается во время семинарских занятий, а развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. Все формы обучения предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студента. Принятый учебный план предполагает, что на каждый час аудиторных занятий по курсу общей физики необходимо иметь примерно час, или несколько больше, самостоятельной внеаудиторной работы студента. По лекционному материалу и по лабораторным работам, как правило, имеются пособия, которые помогают студенту более эффективно организовать его самостоятельную работу. Однако в настоящее время почти нет пособий, которые помогли бы студенту научиться самостоятельно решать задачи.

Ввиду недостатка времени на семинарах не удается рассмотреть все важные типы задач и методы их решения. В результате этого они остаются вне курса. Настоящее пособие позволяет включить не охваченные семинарами вопросы в круг обязательных, точно так же, как это делается в отношении теоретического материала, который не охвачен лекциями, но входит в обязательную программу. Пособие составлено с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться для самостоятельных занятий. Весь материал курса разбит на разделы. Разбор задач всех разделов проводится по единой схеме, причем каждый раздел можно прорабатывать независимо от других.

В первом подразделе «теоретический материал» перечислены вопросы, которые студент должен знать прежде, чем приступить к проработке задач.

Во втором подразделе «Вопросы по теоретическому материалу» содержатся вопросы, которые позволяют студенту произвести самоконтроль усвоения теоретического материала.

В третьем подразделе содержатся основные типы задач и методы их решения. При выделении типов

задач, встречающихся в курсе, авторы исходили главным образом из методической необходимости иметь классификацию задач, которая позволяла бы упорядочить подход к их решению. Студенту рекомендуется прежде всего прочитать часть «Классификация». В результате этого должно возникнуть цельное представление о различных типах задач, методах их решения и формулах и законах, которые при этом используются. В каждом конкретном случае необходимо убедиться в том, что исходные данные являются необходимыми и достаточными, т. е. что задача является ни переопределенной, ни недоопределенной. После этого можно приступить к части «б» «Примеры». Рекомендуется следующий порядок работы. Прочитать условие задачи и убедиться, что она действительно относится к рассматриваемому типу. Затем вернуться к части «а» и, прочитав общую формулировку методов решения, попытаться самостоятельно решить задачу соответствующим методом. Если это удалось, то проверить правильность решения, сравнив его с решением, приводимым в тексте. Если же нет, то проработать подробно решение по тексту.

В четвертом подразделе содержатся контрольные вопросы, с помощью которых можно проверить усвоение предшествующего материала. Если ответ на некоторые из вопросов вызывает трудности, необходимо возвратиться к соответствующим местам ранее проработанного материала и добиться умения ясно ответить на соответствующий вопрос.

В пятом подразделе содержатся задачи для самостоятельного решения. При полной проработке всего предшествующего материала эти задачи не должны вызвать затруднения. Для контроля правильности решения приведены ответы. Если задачи вызывают затруднения, то предшествующий материал проработан недостаточно качественно и необходимо возвратиться к проработке соответствующих мест.

При составлении пособия авторы стремились использовать наиболее характерные и типичные задачи. С этой целью наряду с новыми заимствовались также задачи из существующих учебников, задачниках и т. д. Как принято в учебных пособиях, соответствующие литературные ссылки не приводятся.

## Раздел I

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАРЯДЫ В ВАКУУМЕ И ТЕЛАХ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СИЛЫ. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

#### 1. Теоретический материал

Электроны и протоны, их массы, заряды, спины, магнитные моменты. Электромагнитная структура протона. Атомы и ионы, условия ионизации. Рекомбинация.

Сравнительная характеристика сильного, электромагнитного, слабого и гравитационного взаимодействий, области их преимущественного проявления.

Основные типы молекулярных связей — ионная связь, ковалентная связь.

Типы связей в материальных телах — ионная, ковалентная, металлическая, силы Ван-дер-Ваальса. Межмолекулярные потенциалы. Роль теплового движения. Конденсация и кристаллизация. Скрытая теплота парообразования и плавления.

Основные свойства свободных электронов в металлах. Плотность состояний, средняя энергия. Распределение Ферми—Дирака. Энергия Ферми. Работа выхода. Внешняя контактная разность потенциалов. Заряджение тел при соприкосновении. Формула Ричардсона—Душана. Эффект Шоттки. Внутренняя контактная разность потенциалов, ее связь с плотностью свободных электронов. Термоэлектрический эффект. Явление Пельтье. Термопары.

Механизм электризации диэлектриков. Природа сил, обуславливающих электризацию соприкосновением, область их действия, связь этих сил со знаком зарядов тел при соприкосновении.

Понятие о зонной теории твердых тел. Проводники, диэлектрики, полупроводники. Электронная и дырочная проводимость. Доноры и акцепторы. Примесные полупроводники. Переходы  $p \rightarrow n \rightarrow p$ ,  $n \rightarrow p \rightarrow n$ . Явления в контактах металл — полупроводник.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Почему нельзя исследовать электромагнитную структуру электрона теми же методами и на тех же ускорителях, на которых была исследована электромагнитная структура протона?

2.2. Какие методы ионизации атомов и молекул вы знаете?

2.3. В чем состоит в принципе доказательство не-сводимости магнитных моментов элементарных частиц к движению зарядов внутри них?

2.4. Напишите простейшее уравнение рекомбинации.

2.5. Укажите экспериментальное доказательство инвариантности элементарного заряда.

2.6. Каков радиус действия ядерных сил и в чем состоит их зарядовая независимость и свойство насыщения?

2.7. В чем заключается физическая сущность ковалентной связи с точки зрения классических представлений? Какие моменты в этой картине призвана объяснить квантовая механика?

2.8. Опишите механизм возникновения сил Ван-дер-Ваальса.

2.9. Какую информацию о взаимодействии молекул можно извлечь непосредственно из вида межмолекулярного потенциала?

2.10. Какой энергии в электронвольтах соответствует величина  $kT$  при комнатной температуре?

2.11. Что надо знать, чтобы оценить величину температуры, при которой начинается плавление тела?

2.12. При каких условиях электроны не могут обладать энергиями, большими энергии Ферми?

2.13. Охарактеризуйте особенности распределения Ферми—Дирака для электронов в металлах при комнатной температуре.

2.14. В чем состоит связь между работой выхода и энергией Ферми?

2.15. Каков порядок размеров области вблизи поверхности тела, в которой проявляются силы, обуславливающие существование работы выхода?



2.16. Пусть при соприкосновении тел  $A$  и  $B$  тело  $A$  зарядилось положительно. У какого из тел работа выхода больше?

2.17. Каким образом внешняя контактная разность потенциалов связана с работами выхода соприкасающихся тел?

2.18. В чем состоит разница в экспериментальном осуществлении внешней и внутренней контактной разности потенциалов? В чем состоят физические механизмы возникновения внутренней и внешней контактной разности потенциалов? Сравните их между собой.

2.19. В чем состоит эффект Шоттки? Какова его роль в эмиссии электронов?

2.20. Что происходит с энергией Ферми при сжатии тела?

2.21. Два одинаковых металлических бруска соприкасаются по одной из поверхностей. Один из брусков сжимается внешним большим давлением. Какие заряды приобретут бруски?

2.22. Что произойдет с внутренней контактной разностью потенциалов, если один из находящихся в контакте металлов сжимать?

2.23. Приведите примеры использования термоэлектричества.

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Классификация

3.1. Оценка макроскопических величин в рамках принятых микроскопических моделей.

Метод решения. Прямое вычисление величин в рамках принятых микроскопических моделей с последующим суммированием и усреднением по макроскопическим совокупностям микроскопических объектов.

3.2. Задачи на внешнюю контактную разность потенциалов; оценка энергии Ферми, нахождение работы выхода, вычисление контактной разности потенциалов, влияние на энергию Ферми различных физических факторов и сопутствующие этому влиянию следствия.

Метод решения. Использование связи между

величиной энергии Ферми, плотностью свободных электронов и работой выхода.

**3.3. Задачи на внутреннюю разность потенциалов:** вычисление внутренней контактной разности потенциалов по плотностям свободных электронов, определение термоэлектрических эффектов.

**Метод решения.** Использование формул, характеризующих распределение электронов по энергиям.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Потенциальная энергия взаимодействия атомов в кристаллической решетке дается формулой  $U = -A/r + B/r^n$ , где  $n > 1$  (рис. 1). Первый член представляет силы притяжения, которые преобладают на больших расстояниях, второй член описывает силы отталкивания, преобладающие на малых расстояниях.

Найдите равновесное расстояние  $r_0$ , глубину потенциальной ямы  $U_0$ , частоту колебаний  $\omega$ . Постройте потенциальную кривую для NaCl, найдя соответствующие атомные характеристики. Решетка NaCl кубическая, плотность каменной соли  $\rho = 2,17 \text{ г/см}^3$ , энергия ее решетки 180 ккал/моль, а частота колебаний, определяемая по измерению показателя преломления,  $\omega = 6 \cdot 10^{13} \text{ 1/с}$ .

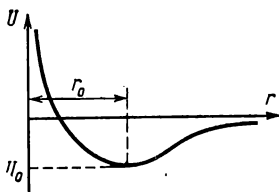


Рис. 1

**Решение.** Минимум потенциальной энергии определяется условием  $(dU/dr) = 0$ . Отсюда следует, что  $r_0 = (nB/A)^{1/(n-1)}$ ,  $U_0 = -[n/(n-1)]A/r_0$ . Потенциальную энергию вблизи положения равновесия можно представить в виде

$$U(r) = U(r_0) + (r - r_0)U'(r_0) + \frac{(r - r_0)^2}{2}U''(r_0) + \dots$$

Тогда  $U''(r_0) = (n-1)A/(r_0)^3$ . Частота колебаний  $\omega = (U''(r_0)/m)^{1/2}$ .

Расстояние  $r_0$  может быть найдено по плотности. Поскольку атомный вес натрия равен 23, а хлора 35,5, то средний атомный вес равен  $(23+35,5)/2=29,25$ . Поэтому

$$r_0 = (29,25 m_p / \rho)^{1/3} \approx 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

где  $m_p$  — масса протона. Так как для NaCl 180 ккал/моль соответствует  $0,62 \cdot 10^{-18}$  Дж/ион, то имеем  $A \approx U_0 r_0 \approx 1,8 \cdot 10^{-28}$  Дж·м. Далее получаем  $U_0'' = \omega^2 m \approx 200$  Дж/м<sup>2</sup>. Поскольку, с другой стороны,  $U_0'' = (n-1)A/(r_0)^3$ , находим  $n \approx 4$ . Из соотношения  $r_0 = (nA/B)^{1/(n-1)}$  получаем  $B \approx 200$  Дж·м<sup>4</sup>. Следовательно, потенциальная кривая для иона в соли NaCl может быть представлена в виде

$$U = -1,8 \cdot 10^{-28}/r + 200/r^4. \quad (1)$$

Следует заметить, что обычно  $n$  берут равной 9 или 10, что лучше согласуется с термодинамическими данными о сжимаемости.

**3.1.2.** Исходя из потенциальной кривой для  $U$ , полученной в задаче 3.1.1., найти объемный коэффициент теплового расширения NaCl при  $T=300$  К.

Решение. Тепловое расширение происходит вследствие того, что равновесное расстояние  $r_0$  между атомами при повышении температуры возрастает. Для расчета возрастания необходимо принять во внимание ангармоничность колебаний. Имеем

$$U(r) = U(r_0) + (r - r_0) \frac{\partial U(r_0)}{\partial r} + \\ + \frac{(r - r_0)^2}{2!} U_0'' + \frac{(r - r_0)^3}{3!} U_0''' + \dots$$

Взяв в качестве  $U$  выражение (1) из 3.1.1, получаем

$$U(x) = U_0 + 100x^2 - 2 \cdot 10^{12}x^3,$$

где  $x = r - r_0$  есть отклонение от точки  $r_0$ , которое различно в разные стороны, что эквивалентно утверждению о смещении точки равновесия. По теореме о равнораспределении энергия колебаний равняется  $kT/2 = 4 \cdot 10^{-21}$  Дж. Величины максимальных отклонений находим из условия, что вся кинетическая энергия превратилась в потенциальную, т. е. из условия  $100x^2 - 2 \cdot 10^{12}x^3 = 4 \cdot 10^{-21}$ . (2)

Отсюда получаем

$$x_1 = -5,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}; \quad x_2 = 7,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}. \quad (2')$$

Это означает, что средняя точка колебаний сместилась на  $0,85 \cdot 10^{-12}$  м. На ту же величину сместился и другой атом, т. е. расстояние  $r_0 = 2,8 \cdot 10^{-10}$  м увеличилось за счет тепловых колебаний при температуре 300 К на  $1,7 \cdot 10^{-12}$  м. Следовательно, коэффициент линейного расширения  $\alpha$  равен

$$\alpha = \frac{1}{r_0} \frac{x_1 + x_2}{r} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}. \quad (3)$$

Экспериментальное значение  $\alpha = 4 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ . Разница в два раза объясняется грубостью модели и прикидочным значением используемых параметров.

## *II-й тип задач (3.2)*

**3.2.1.** Работа выхода у калия равна 2 эВ, а у вольфрама — 4,54 эВ. Зарядами какого знака заряжаются калий и вольфрам при соприкосновении? Чему равна возникающая при этом разность потенциалов? Почему при разведении поверхностей соприкосновения на них не остается заряд?

Решение. Поскольку работа выхода у вольфрама больше, чем у калия, при контакте вольфрам заряжается отрицательно. Контактная разность потенциалов равна  $4,54 - 2 = 2,54$  В. Вольфрам и калий — проводники. Если бы можно было их поверхности соприкосновения развести одновременно во всех точках, то заряды на поверхности остались бы и тела зарядились, как это случается у диэлектриков. Практически же поверхности разводятся не одновременно во всех точках, а в некоторой последовательности. Площадь его последнего соприкасающегося участка стремится к нулю и к нулю стремится величина находящегося на нем заряда.

**3.2.2.** На поверхность калия падает фотон с длиной волны 0,40 мкм. Этот фотон поглощается внутри материала и передает всю свою энергию некоторому электрону, который устремляется к поверхности, преодолевает силы, удерживающие его в металле (фотоэффект) и покидает металл. Чему равна скорость электрона вне металла? Работа выхода из калия  $A = 2$  эВ.

Решение. Записываем закон сохранения энергии для процесса (уравнение Эйнштейна):

$$\hbar\omega = mv^2/2 + A,$$

где  $\omega$  — частота падающего фотона. Отсюда.

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(\hbar\omega - A)} = 0,665 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

так как

$$\hbar\omega = \hbar \frac{2\pi c}{\lambda} = 3,13 \text{ эВ},$$

$$\hbar\omega - A = 1,13 \text{ эВ} = 2,08 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

**3.2.3.** Оценить порядок величины энергии Ферми для меди.

Решение. В меди вне замкнутой оболочки содержится один электрон, который обобществляется и входит в число свободных электронов металла. Таким образом, для грубой оценки можно считать, что число свободных электронов у меди равно числу атомов. Энергия Ферми  $E_F$  связана с числом свободных электронов  $N$  и объемом  $V$ , занимаемым металлом, соотношением

$$E_F = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{2} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m}.$$

У меди удельный вес около  $9 \text{ г/см}^3$ , а атомный вес 63,5. Следовательно, ее молярный объем, в котором содержится  $6 \cdot 10^{23}$  атомов (и такое же число свободных электронов), равен  $\approx 7 \text{ см}^3$ . Подставляя эти значения в формулу для энергии Ферми, находим

$$E_F \sim 10^{-18} \text{ Дж} \sim 7 \text{ эВ}.$$

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Оценить величину внутренней контактной разности потенциалов между медью и калием при температуре  $27^\circ \text{C}$ .

Решение. Внутренняя контактная разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = (kT/e) \ln(n_{01}/n_{02}),$$

где  $n_{01}$  и  $n_{02}$  — концентрации свободных электронов. Медь и калий входят в группу одновалентных элементов, у которых вне замкнутой оболочки находится

один электрон, который обобществляется. Следовательно, на один атом приходится один свободный электрон. Поэтому для отношения концентраций свободных электронов в них можно написать

$$n_{01}/n_{02} = \rho_1 A_2 / \rho_2 A_1,$$

где  $\rho$  и  $A$  — удельные и атомные веса соответствующих металлов. Для меди  $\rho_1 \approx 9$  г/см<sup>3</sup>,  $A_1 = 63,5$ ; для калия  $\rho_2 \approx 0,86$  г/см<sup>3</sup>,  $A_2 = 39$ .

Отсюда

$$\Delta\varphi = (1/40) \ln 6,4 \text{ В} \approx 0,04 \text{ В}.$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Опыты по рассеянию электронов на протонах позволили выяснить электромагнитную структуру протона. Электрический заряд в протоне распределен по определенному закону. Однако полный заряд протона равен единичному заряду.

Не противоречат ли эти два факта друг другу? Иначе говоря, если единичный заряд распределен определенным образом в протоне, то в части объема, занимаемого зарядом, должно быть сосредоточено количество заряда, меньшее, чем единичное, т. е. должны существовать дробные порции заряда. Разъясните это противоречие. Выясните, какой смысл имеют утверждения о распределении заряда внутри протона по определенному закону.

4.2. Какое главное противоречие несет в себе утверждение о точечности электрона?

4.3. Напишите основное уравнение парной рекомбинации.

4.4. В чем состоят основные аргументы в доказательство несводимости магнитных моментов элементарных частиц к картине движения зарядов внутри них?

4.5. Предположим, что заряд элементарных частиц был бы не инвариантным и уменьшался с увеличением скорости. Каким зарядом в этом случае обладали бы атомы?

4.6. Что такое зарядовая независимость ядерных сил, в чем состоит свойство насыщения ядерных сил, как оно связано с короткодействующим характером их действия?

4.7. Каков порядок величины внутриатомных электрических полей?

4.8. Какие факторы, обуславливающие существование ковалентной связи, носят классический характер и какие обстоятельства нуждаются для своего обоснования в квантовой теории?

4.9. Каков порядок величины внешней и внутренней контактной разности потенциалов?

4.10. Начертите график плотности состояний свободных электронов в металлах. Какие свойства движения электронов надо принять во внимание, чтобы получить формулу для плотности состояний?

4.11. Что происходит с энергией Ферми, если какой-либо фактор изменяет объем образца без изменения числа свободных электронов и их эффективных масс?

4.12. Каков порядок величины энергии Ферми для металлов при комнатных температурах и средней энергии теплового движения атомов? Какой температуре соответствует эта энергия Ферми?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Чему равняется максимальная кинетическая энергия свободных электронов при 0 К в меди?

Ответ:  $1,6 \cdot 10^6$  м/с.

5.2. Вычислите величину энергии Ферми у калия.

Ответ:  $E_F = 2$  эВ.

5.3. В результате всестороннего сжатия объем металла уменьшился в  $\alpha$  раз, т. е. стал равным  $V = V_0/\alpha$  ( $\alpha > 1$ ), где  $V_0$  — его первоначальная величина. Как изменится энергия Ферми в результате сжатия?

Ответ:  $E_F = E_F^{(0)}/\alpha^{2/3}$ .

5.4. Объясните, почему плотность состояний для энергии Ферми в двух экзemplярах некоторого металла с различным объемом будет разной.

*Указание.* Надо проанализировать формулы для плотности состояний и энергии Ферми.

5.5. Чему равняется средняя квадратичная скорость свободных электронов в меди при 0 К?

Ответ:  $1,25 \cdot 10^6$  м/с.

5.6. Докажите, что средняя квадратичная ско-

рость свободных электронов, вычисленная в предыдущей задаче, изменяется лишь незначительно при изменении температуры.

*Указание.* Необходимо принять во внимание характер изменения распределения Ферми—Дирака при изменении температуры.

5.7. Поскольку электронная теплоемкость обуславливается лишь электронами, находящимися в интервале энергий  $\sim kT$  около уровня энергии Ферми, докажите, что она пропорциональна  $T$ .

*Указание.* За счет теплообмена энергия электронов вблизи энергии Ферми увеличивается на произведение числа электронов, участвующих в теплообмене, на их среднюю энергию, т. е. всего это увеличение  $\sim T^2$ , а следовательно теплоемкость  $\sim (\partial T^2 / \partial T) \sim T$ .

## Раздел II

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАДАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ В ПУСТОТЕ

#### 1. Теоретический материал

Закон Кулона и принцип суперпозиции действия электростатических сил. Системы единиц СИ и CGSE. Полевая трактовка закона Кулона. Напряженность электростатического поля. Напряженность поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей. Напряженность поля системы точечных зарядов. Непрерывное распределение заряда. Линейная, поверхностная и объемная плотности заряда. Напряженность поля, созданного непрерывным распределением заряда. Линия и поток вектора напряженности электростатического поля. Теорема Остроградского—Гаусса и ее применение для расчета электрических полей. Работа перемещения точечного заряда в электростатическом поле. Потенциальная энергия точечного заряда в электростатическом поле. Теорема о циркуляции вектора



напряженности электростатического поля. Потенциал. Потенциал поля точечного заряда. Принцип суперпозиции. Потенциал поля, созданного системой точечных зарядов и непрерывным распределением зарядов. Неоднозначность потенциала. Нормировка. Разность потенциалов. Эквипотенциальные поверхности. Связь между вектором напряженности и потенциалом. Интегральные и дифференциальные уравнения электростатического поля в пустоте. Уравнения Лапласа и Пуассона. Электрический диполь. Потенциал и напряженность поля электрического диполя. Потенциальная энергия диполя в электростатическом поле. Собственная и взаимная энергии электрических зарядов. Энергия электростатического поля и ее объемная плотность. Силы, действующие на заряды в электростатическом поле. Действие поля на электрический диполь. Взаимодействие диполей.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Взаимодействие каких зарядов описывает закон Кулона? Какой заряд мы называем точечным? Какими единицами измеряются заряды в системах единиц СИ и CGSE?

2.2. Каков физический смысл напряженности электростатического поля? Как рассчитать напряженность поля заданного распределения электрических зарядов? Укажите способы моделирования электростатического поля. Где начинается и кончается линия напряженности? Какая связь существует между потоком напряженности и ее величиной? Какими единицами измеряется напряженность поля в системах единиц СИ и CGSE?

2.3. Для каких систем зарядов удобно применить теорему Остроградского — Гаусса при определении напряженности поля, созданного этими зарядами? Каков смысл понятия  $\operatorname{div} E$ ?

2.4. Каков физический смысл потенциала электростатического поля и разности потенциалов? Как рассчитать потенциал поля заданного распределения электрических зарядов? Какими единицами измеряется потенциал в системах единиц СИ и CGSE? Каков смысл понятия  $\operatorname{rot} E$ ?

2.5. Как ориентированы линии напряженности поля относительно эквипотенциальных поверхностей? Откуда следует, что линии напряженности поля ортогональны эквипотенциальным поверхностям? Чему равен градиент потенциала в данном направлении?

2.6. Каким граничным условиям должны удовлетворять дифференциальные уравнения электростатического поля в пустоте?

2.7. Какая система зарядов называется электрическим диполем? Что мы называем вектором электрического дипольного момента и как он направлен? Какие еще подобные системы электрических зарядов Вы знаете? Как изменяется величина напряженности поля, созданного точечным зарядом, диполем и квадруполем при увеличении расстояния до точки наблюдения?

2.8. Что понимают под собственной энергией электрического заряда? Как рассчитать собственную энергию заданного распределения заряда? Что Вы можете сказать о собственной энергии точечного заряда? Где локализована собственная энергия зарядов?

2.9. Что Вы можете сказать о направлениях силы взаимодействия двух точечных зарядов, точечного заряда и диполя и двух диполей?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Классификация

3.1. Определение напряженности и потенциала заданного распределения точечных зарядов.

Метод решения. Прямое суммирование выражений для потенциала и напряженности электростатического поля каждого заряда из заданного распределения точечных зарядов:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} \cdot q_i,$$
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|},$$

где  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_i$  — векторы точки наблюдения (точки, в ко-

торой определяются  $E$  и  $\varphi$ ) и точки расположения заряда  $q_i$  соответственно.

**3.2. Определение потенциала и напряженности электростатического поля заданного непрерывного распределения линейных ( $\gamma$ ), поверхностных ( $\sigma$ ) или объемных ( $\rho$ ) зарядов.**

**Метод решения.** Прямое интегрирование выражений для потенциала и напряженности поля заданного непрерывного распределения заряда:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dq, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|},$$

где  $dq$  может быть равно  $\rho dV$ ,  $\sigma dS$  или  $\gamma dl$ .

**3.3. Определение напряженности электростатического поля и потенциала заданного непрерывного распределения зарядов, обладающего плоской, осевой или центральной симметрией.**

**Метод решения.** Применение теоремы Остроградского—Гаусса и формулы, связывающей напряженность поля и потенциал:

$$\oint_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

где  $d\mathbf{S}$  — векторный элемент поверхности  $S$ , совпадающей по направлению с внешней (по отношению к  $S$ ) нормалью к поверхности  $dS$ .

**3.4. Определение потенциала и напряженности электростатического поля, созданного электрическим диполем или системой диполей.**

**Метод решения.** Использование соотношений, определяющих потенциал и напряженность поля электрического диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right], \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3},$$

где  $\mathbf{p}$  — электрический момент диполя; а  $r$  — расстояние от диполя до точки поля.

Для дискретного распределения диполей

$$\mathbf{E} = \Sigma \mathbf{E}_i, \quad \varphi = \Sigma \varphi_i,$$

где  $\varphi_i$  и  $\mathbf{E}_i$  — потенциал и напряженность поля, созданного отдельным диполем из заданного, дискретно-

го распределения диполей. Для непрерывного распределения одинаковых диполей

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{3(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{P})}{r^5} - \frac{d\mathbf{P}}{r^3} \right], \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{P})}{r^3},$$

где  $d\mathbf{P} = \mathbf{p}ndV$  и  $n$  — концентрация диполей.

3.5. Определение собственной потенциальной энергии заданного распределения электрического заряда и энергии электростатического поля этого заряда в заданном объеме.

Метод решения. Использование соотношений, определяющих собственную энергию для заданного распределения точечных зарядов

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i q_i, \quad \Phi_i = \sum_{j \neq i} \Phi_j;$$

для данного непрерывного распределения заряда

$$W_m = (1/2) \int \Phi dq;$$

и для энергии поля в заданном объеме

$$W_v = (\epsilon_0/2) \int E^2 dV.$$

3.6. Определение энергии точечного заряда или диполя, а также непрерывного распределения заряда или диполей во внешнем поле и действующих на них сил.

Метод решения. Использование соотношений, определяющих взаимную потенциальную энергию точечного заряда

$$W_0 = \Phi_0 q,$$

диполя

$$W_0 = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0),$$

непрерывного распределения заряда

$$W_0 = \int \Phi_0 dq$$

и непрерывного распределения диполей

$$W_0 = - \int (\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{P}),$$

а также формулы, связывающей эту энергию с силой,

действующей на заряды или диполи со стороны внешнего поля

$$\mathbf{F}_0 = -q \text{grad } W_0.$$

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. В вершинах квадрата со стороной  $a$  находятся точечные заряды  $q_1, q_2, q_3, q_4$  (рис. 2). Определите

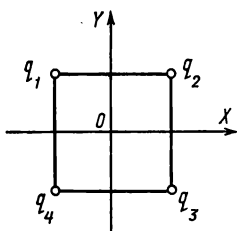


Рис. 2

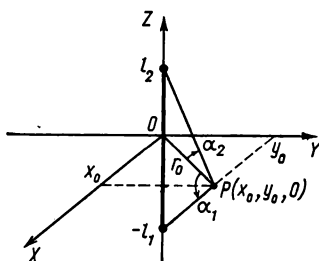


Рис. 3

напряженность электростатического поля и потенциал в центре квадрата. Рассмотрите случаи, когда:

- а)  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ ;
- б)  $q_1 = q_3 = q$ ;  $q_2 = q_4 = -q$ ;
- в)  $q_1 = q_2 = -q$ ;  $q_3 = q_4 = q$ .

Решение. Напряженность поля и потенциал системы точечных зарядов определяются соотношениями

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} q_i; \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|}.$$

Учитывая, что  $\mathbf{r}_0 = 0$ ,  $|\mathbf{r}_i| = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ ,

$$r_{1x} = r_{4x} = -\frac{a}{2}, \quad r_{1y} = r_{2y} = \frac{a}{2},$$

$$r_{2x} = r_{3x} = \frac{a}{2}, \quad r_{3y} = r_{4y} = -\frac{a}{2},$$

получим

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{a^2} (q_1 - q_2 - q_3 + q_4),$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{a^2} (-q_1 - q_2 + q_3 + q_4),$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{2}}{a} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4), \quad \varphi_\infty = 0.$$

а) Если  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ , то  $E_x = E_y = 0$ ,  $\varphi = \frac{4\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

б) Если  $q_1 = q_3 = q$ ;  $q_2 = q_4 = -q$ , то  $E_x = E_y = \varphi = 0$ .

в) Если  $q_1 = q_2 = -q$ ;  $q_3 = q_4 = q$ , то  $E_x = 0$ ,

$$E_y = \frac{4\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad \varphi = 0.$$

## II-й тип задач (3.2)

3.2.1. Линейный заряд с плотностью  $\gamma$  равномерно распределен вдоль нити, занимающей часть оси  $Z$  от  $z = -l_1$  до  $z = l_2$ . Найдите выражения потенциала и напряженности электростатического поля для точек, лежащих в плоскости  $XY$  ( $z = 0$ ) (рис. 3).

Решение. По определению

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\gamma dl}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \gamma dl.$$

Учитывая, что

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})_z = -z, \quad (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})_r = r_0, \quad dl = dz,$$

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3 = (r_0^2 + z^2)^{3/2},$$

получим

$$E_z = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{z dz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(r_0^2 + l_2^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r_0^2 + l_1^2)^{1/2}} \right] =$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1),$$

$$\begin{aligned}
 E_{r_0} &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{r_0 dz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = \\
 &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left[ \frac{l_2}{(r_0^2 + l_2^2)^{1/2}} + \frac{l_1}{(r_0^2 + l_1^2)^{1/2}} \right] = \\
 &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0 r_0} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1), \\
 \varphi &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\sqrt{r_0^2 + l_2^2} + l_2}{\sqrt{r_0^2 + l_1^2} - l_1} \right) = \\
 &= \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(\sqrt{r_0^2 + l_2^2} + l_2)(\sqrt{r_0^2 + l_1^2} + l_1)}{r_0^2} \right],
 \end{aligned}$$

где углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  показаны на рисунке.

1) Рассмотрим частный случай, когда  $l_1 = l_2 = l$ :

$$\begin{aligned}
 E_z = 0, \quad E_{r_0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\gamma}{r_0} \left[ \frac{l}{(r_0^2 + l^2)^{1/2}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\gamma}{r_0} \sin \alpha, \\
 \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\gamma \ln \left[ \frac{\sqrt{r_0^2 + l^2} + l}{r_0} \right].
 \end{aligned}$$

2) Пусть  $l_1 = l_2 = l \rightarrow \infty$ , тогда

$$E_z = 0, \quad E_{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\gamma}{r_0}.$$

Найдем разность потенциалов между точками с координатами  $r_0$  и  $R$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{r_0} - \varphi_R &= \frac{2\gamma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{R(\sqrt{r_0^2 + l^2} + l)}{r_0(\sqrt{R^2 + l^2} + l)} \right] = \\
 &= \frac{2\gamma}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{2\gamma}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r_0^2 + l^2} + l}{\sqrt{R^2 + l^2} + l}.
 \end{aligned}$$

Тогда при  $l \rightarrow \infty$ ,

$$\varphi_{r_0} - \varphi_R = \frac{2\gamma}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0},$$

так как

$$\lim \left[ \ln \frac{V \sqrt{r_0^2 + l^2} + l}{\sqrt{R^2 + l^2} + l} \right] = 0 \text{ и } \varphi_{r_0} = \frac{2\gamma}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0} + \varphi_R.$$

3). При  $l_2=0$  и  $l_1 \rightarrow \infty$  получим

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r_0}, \quad E_{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r_0}.$$

*Примечание.* Здесь использованы интегралы типа:

$$\int \frac{zdz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(z_0^2 + z^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{dz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{r_0^2} \frac{z}{(r_0^2 + z^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{dz}{(r_0^2 + z^2)^{1/2}} = \ln(z + \sqrt{r_0^2 + z^2}).$$

**3.2.2.** Очень тонкое кольцо радиуса  $R$  равномерно заряжено с линейной плотностью заряда  $\gamma$ . Вычислите потенциал и напряженность электростатического поля в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии  $z$  от его центра. Найдите численные значения  $\varphi$  и  $E$ , если  $R=5$  см,  $z=3$  см,  $\gamma = \frac{2}{\pi} \cdot 10^{-12} \frac{\text{К}}{\text{м}}$  (рис. 4).

По определению

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\gamma dl}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}$$

и

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \gamma dl,$$

где  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор точки  $z(\mathbf{r}_0 = (0, 0, z))$ , а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор элемента  $dl$  ( $\mathbf{r} = (R \cos \alpha, R \sin \alpha, 0)$ ); тогда для потенциала и компонент напряженности поля имеем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\gamma R d\alpha}{(R^2 + z^2)^{1/2}},$$

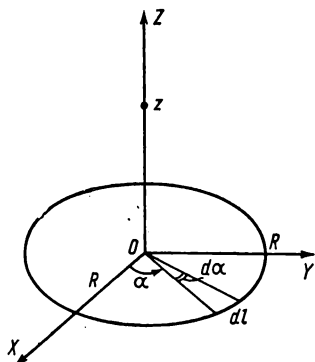


Рис. 4



$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\gamma R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \cos \alpha d\alpha,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\gamma R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \sin \alpha d\alpha,$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\gamma R z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\alpha.$$

После интегрирования по  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$  получим (см. также рис. 5):

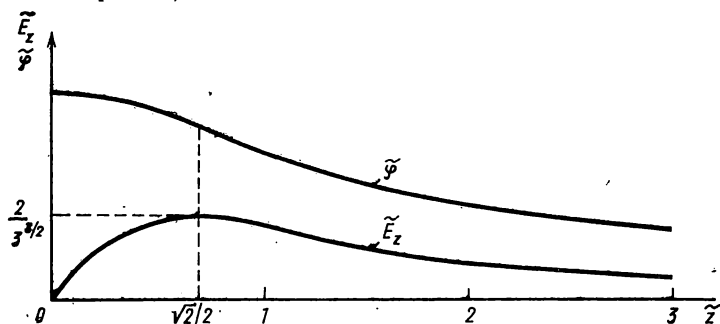


Рис. 5

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\gamma}{(R^2 + z^2)^{1/2}}, \quad E_x = E_y = 0,$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R\gamma z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Для заданных численных значений найдем

$$\Phi \approx 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ В}, \quad E_z \approx 0,27 \text{ В/м}.$$

При  $z = 0$   $\Phi = \gamma/2\epsilon_0$  и  $|E| = 0$ ; и при  $z = \sqrt{2} R/2$

$$E_z = E_{z \max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\gamma}{3^{3/2} R}.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{z} = z/R,$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{(1/4\pi\epsilon_0) 2\pi\gamma} = \frac{1}{(1 + \tilde{z}^2)^{1/2}},$$

$$\tilde{E}_z = \frac{E_z}{(1/4\pi\epsilon_0) 2\pi\gamma/R} = \frac{\tilde{z}}{(1 + \tilde{z}^2)^{3/2}}.$$

На рис. 5 отложена зависимость  $\tilde{E}_z$  и  $\tilde{\Phi}$  от  $\tilde{z}$ .

3.2.3. Бесконечно длинная полоска шириной  $2a$  заряжена поверхностным зарядом  $\sigma$  так, что его величина зависит только от координаты, параллельной ширине полоски  $\sigma = \sigma(y)$  (рис. 6). Найдите выражения для компонент вектора напряженности электростатического поля в произвольной точке. Вычислите величину напряженности поля для случаев:

а)  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ ,

б)  $\sigma = \sigma_0 \sin(2\pi/\lambda)y$ , где  $\sigma_0$  и  $\lambda$  — постоянные величины,  $a = \infty$ .

Решение. Систему отсчета выберем так, как показано на рис. 6. На поверхности распределения заряда выделяем узкую полоску шириной  $dy$  параллельную оси  $X$ . Тогда заряд, приходящийся на единицу длины этой полоски, будет равен  $d\gamma = \sigma(y) dy$  и поле созданное этой полоской в точке с координатами  $y_0, z_0$  равно (см. решение задачи 3.2.1):

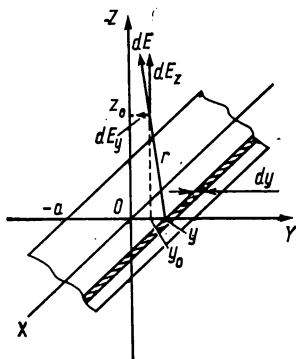


Рис. 6

$$|dE| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2d\gamma}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sigma(y) dy}{[(y - y_0)^2 + z_0^2]^{1/2}}.$$

Для компонент поля соответственно получим

$$E_y = \frac{-2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{(y - y_0) \sigma(y) dy}{(y - y_0)^2 + z_0^2}, \quad E_z = \frac{2z_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\sigma(y) dy}{(y - y_0)^2 + z_0^2}.$$

В случае  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  (а) получим

$$E_y = - \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(y_0 - a)^2 + z_0^2}{(y_0 + a)^2 + z_0^2} \right],$$

$$E_z = \frac{2\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \arctg \left( \frac{a + y_0}{z_0} \right) + \arctg \left( \frac{a - y_0}{z_0} \right) \right].$$

Здесь использованы интегралы типа

$$\int \frac{x dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \ln(b^2 + x^2), \quad \int \frac{dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{b} \arctg \frac{x}{b}.$$

В случае  $\sigma = \sigma_0 \sin(2\pi/\lambda)y$  (6) при  $a = \infty$  получим

$$E_y = -\frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}|z_0|\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y_0\right),$$

$$E_z = \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}|z_0|\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y_0\right) \frac{z}{|z_0|},$$

$$|E| = \frac{2\pi\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda}|z_0|\right).$$

Здесь использован интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b+cy}{p+2qy+y^2} \sin(ay) dy =$$

$$= \pi \exp(-a\sqrt{p-q^2}) \left[ \frac{cq-b}{\sqrt{p-q^2}} \sin(aq) + c \cos(aq) \right].$$

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Две концентрические сферы с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) получили заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно, которые равномерно распределились по их поверхности. Найдите выражения для напряженности и потенциала электростатического поля в точке, удаленной на расстояние  $r$  от центра сфер.

**Решение.** Напряженность поля заряженных сфер найдем, используя теорему Остроградского—Гаусса:

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq.$$

Интеграл, стоящий слева, представляет собой поток вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность  $S$ . В качестве такой поверхности выберем сферу радиуса  $r$ , имеющую тот же центр, что и сферы  $R_1$  и  $R_2$ . Из соображений симметрии следует, что во всех точках поверхности  $S$  вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен этой поверхности и имеет одинаковую величину. Поэтому

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = E \cdot 4\pi r^2.$$

Интеграл, стоящий справа, есть полный заряд внутри

объема, ограниченного поверхностью  $S$ . Таким образом, получим

$$\text{для } r < R_1: E_{0i} \cdot 4\pi r^2 = 0 \text{ и } E_{0i} = 0;$$

$$\text{для } R_1 < r < R_2: E_i \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q_1 \text{ и } E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r};$$

$$\text{для } r > R_2: E_e \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_1 + Q_2) \text{ и}$$

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{r^2}.$$

Для определения потенциала используем связь между  $E$  и  $\varphi$  в сферических координатах

$$E = -\partial\varphi/\partial r.$$

Тогда для  $r < R_1: \varphi_{0i} = C_1;$

$$\text{для } R_1 < r < R_2: \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r} + C_2;$$

$$\text{для } r > R_2: \varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r} + C_3.$$

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  определим из условий:

а) при  $r \rightarrow \infty: \varphi_2 \rightarrow 0$ , отсюда  $C_3 = 0$ ;

б) при  $r = R_1: \varphi_{0i} = \varphi_i$ , тогда  $C_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} + C_2$ ;

в) при  $r = R_2: \varphi_i = \varphi_e$ , тогда  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_2} + C_2 =$   

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{R_2}.$$

Из условий (б) и (в) находим

$$C_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) \text{ и } C_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}.$$

Подставляя значения  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  в выражения для потенциала, получим

$$\text{для } r < R_1: \varphi_{0i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right);$$

$$\text{для } R_1 < r < R_2: \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{r} \right);$$

для  $r > R_2$ :  $\varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r}$ .

Заметим, что нулевое значение потенциала (условие а)) можно задать для любой наперед выбранной точки. При этом изменятся только значения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ .

**3.3.2.** Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса  $R$  равномерно заряжен по объему с плотностью заряда  $\rho$ . Найдите выражения для напряженности и потенциала электростатического поля в точке, удаленной на расстояние  $r$  от оси цилиндра.

**Решение.** Напряженность поля заряженного цилиндра найдем, используя симметрию заряда и теорему Остроградского—Гаусса:

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Выберем в качестве поверхности  $S$ , через которую следует определить поток вектора  $\mathbf{E}$ , поверхность цилиндра радиуса  $r$  и высоты  $l$ , имеющего ту же ось, что и заданный цилиндр радиуса  $R$ . Из соображений симметрии следует, что во всех точках боковой поверхности цилиндра  $S$  вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен этой поверхности и имеет одинаковую величину. На торцах же цилиндра  $S$  вектор  $\mathbf{E}$  параллелен поверхности. Поэтому

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}) = E_r \cdot 2\pi r \cdot l,$$

где  $E_r$  — величина напряженности поля в точках на расстоянии  $r$  от оси цилиндра.

Для интеграла, стоящего справа, соответственно имеем

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = 2\pi l \rho \int_0^r h dh,$$

где  $h$  — радиус цилиндрического кольца объемом

$$dV = l \cdot 2\pi h dh.$$

Таким образом,

для  $r < R$ :  $E_{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\rho r;$

для  $r > R$ :  $E_{re} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R^2 \rho}{r}$ .

Для определения потенциала используем связь между  $E$  и  $\phi$  в цилиндрических координатах

$$E_r = - \frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

Тогда для  $r < R$ :  $\phi_i = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi \rho r^2 + C_1$ ;

для  $r > R$ :  $\phi_e = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi R^2 \rho \ln r + C_2$ .

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим из условий непрерывности потенциала и равенства нулю потенциала в заданной точке, т. е.

при  $r=0$ :  $\phi_i=0$ , отсюда  $C_1=0$ ;

при  $r=R$ :  $\phi_i = \phi_e$ , тогда  $C_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi R^2 \rho (2 \ln R - 1)$ .

Таким образом,

при  $r < R$ :  $\phi_i = - (1/4\pi\epsilon_0) \rho \pi r^2$ ;

и при  $r > R$ :  $\phi_e = - (1/4\pi\epsilon_0) \rho 2\pi R^2 [\ln(r/R) + 1/2]$ .

*IV-й тип задач (3.4)*

**3.4.1.** В каких точках на расстоянии  $R$  от диполя с моментом  $\mathbf{p}$  величина напряженности электростатического поля будет иметь максимальное и минимальное значения (рис. 7)?

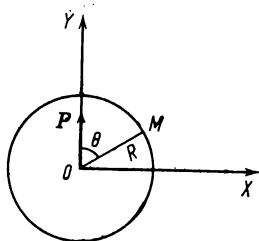


Рис. 7

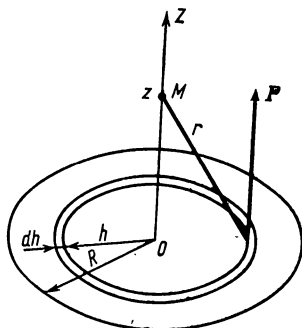


Рис. 8

Решение. Выберем систему отсчета так, чтобы диполь находился в начале координат, а вектор  $\mathbf{p}$  был параллелен оси  $Y$ . Из симметрии задачи следует, что во всех точках круга, полученного сечением плоскости  $y = \text{const}$  сферы радиуса  $R$ , величина  $E$  будет одинакова. Таким образом, задача сводится к отысканию значений  $E$  в точках круга радиуса  $R$ , лежащего в плоскости  $XY$ . По определению

$$\mathbf{E} = (1/4\pi\epsilon_0)[3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{p}/r^3].$$

Следовательно, напряженность поля в произвольной точке круга (рис. 7) равна

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{p}{R^3} \sin 2\theta,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{R^3} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{R^3} (3 \cos^2 \theta + 1)^{1/2}.$$

Исследование функции  $f(\theta) = (3 \cos^2 \theta + 1)^{1/2}$  на экстремум показывает, что

при  $\theta = 0, \pi$ :  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{E}|_{\max} = (1/4\pi\epsilon_0) 2p/R^3$ ;  
а при  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ :  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{E}|_{\min} = (1/4\pi\epsilon_0) p/R^3$ .

**3.4.2.** На единицу площади очень тонкой пластинки, имеющей форму диска радиуса  $R$ , приходится  $n$  диполей ( $n$  — постоянная величина). Считая, что все диполи обладают одинаковым дипольным моментом  $\mathbf{p}$ , направленным перпендикулярно поверхности пластинки, найдите выражения для потенциала и напряженности электростатического поля в произвольной точке  $M$ , расположенной на оси диска на расстоянии  $z$  от его центра (рис. 8).

Решение. Выделим на диске кольцо радиуса  $h$  и шириной  $dh$ . Тогда все диполи на поверхности этого кольца создадут в точке  $M$  одинаковый потенциал, а так как потенциал, созданный одним диполем, равен

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{(h^2 + z^2)^{3/2}},$$

то потенциал, созданный в точке  $M$  всеми диполями кольца  $dS = 2\pi h dh$ ,

$$d\varphi = \varphi_1 n 2\pi h dh = (1/4\pi\epsilon_0) 2\pi n p z h dh (h^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Отсюда

$$\Phi = \int_0^R d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi n\rho \left[ 1 - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] (\Phi_\infty = 0).$$

Напряженность поля найдем из соотношения

$$E_z = -\partial\Phi/\partial z \quad (E_r = 0).$$

Тогда

$$|\mathbf{E}| = E_z = (1/4\pi\epsilon_0) 2\pi R^2 n\rho (R^2 + z^2)^{-3/2}.$$

*V-й тип задач (3.5)*

**3.5.1.** Найдите выражение для собственной энергии заряда, равномерно распределенного с плотностью  $\rho$  внутри сферы радиуса  $R$ . Во сколько раз энергия электростатического поля, локализованная в объеме шара, меньше энергии, локализованной вне шара?

Решение. Напряженность поля и потенциал сферы, равномерно заряженной по объему, соответственно равны (см. решение задачи 5.15)

$$\text{для } r < R: \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \mathbf{r},$$

$$\Phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2} \frac{Q}{R} \left( 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right);$$

$$\text{для } r > R: \mathbf{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r},$$

$$\Phi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad \Phi_\infty = 0,$$

где  $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  — полный заряд внутри сферы.

Так как

$$W_m = \frac{1}{2} \int \Phi_i \rho dV, \quad \text{а } dV = 4\pi r^2 dr,$$

то

$$W_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{4R} 4\pi\rho \int_0^R \left( 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) r^2 dr =$$



$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 0,6 \frac{Q}{R},$$

$$W_i = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^R E_i^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 0,1 \frac{Q}{R},$$

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty E_e^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 0,5 \frac{Q}{R},$$

$$\eta = \frac{W_e}{W_i} = 5.$$

**3.5.2.** Вычислите потенциальную энергию, приходящуюся на один заряд, расположенный в неограниченной линейной цепочке точечных зарядов, величина которых равна  $q$ , а знаки чередуются. Расстояние между соседними зарядами  $\pm q$  равно  $a$  (рис. 9).

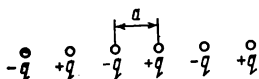


Рис. 9

**Решение.** Пусть  $E$  — энергия одного заряда, например  $+q$ , в поле остальных зарядов. Тогда собственная энергия всей системы зарядов равна

$$\left(\frac{1}{2}\right) NE$$

(где  $N$  — общее число зарядов). Следовательно, энергия, приходящаяся на один заряд, равна

$$W = \left(\frac{1}{2}\right) E,$$

где

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( 2 \frac{q}{a} - 2 \frac{q}{2a} + 2 \frac{q}{3a} - 2 \frac{q}{4a} + \dots \right).$$

Таким образом,

$$W = - (1/4\pi\epsilon_0) q^2 a^{-1} \ln 2,$$

где

$$\ln 2 = 1 - (1/2) + (1/3) - (1/4) + \dots$$

*VI-й тип задач (3.6)*

**3.6.1.** Диполь с моментом  $p$  находится на расстоянии  $r$  от точечного заряда  $q$ . Найдите выражения

для энергии диполя и силы, действующей на диполь, если:

а) вектор  $\mathbf{p}$  параллелен прямой, соединяющей заряд и диполь ( $\mathbf{p} \uparrow \mathbf{r}$ ).

б) вектор  $\mathbf{p}$  перпендикулярен этой прямой ( $\mathbf{p} \perp \mathbf{r}$ ) (рис. 10).

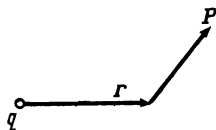


Рис. 10

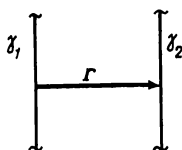


Рис. 11

Решение. По определению  $W_p = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ . Так как  $\mathbf{E} = (1/4\pi\epsilon_0)qr^{-3}\mathbf{r}$ , то для случаев

а)  $W_p = -(1/4\pi\epsilon_0)pqr^{-2}$ , б)  $W_p = 0$ .

По определению  $\mathbf{F} = -\text{grad } W_p$ . Поэтому (см. примечание):

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Для случаев

$$\text{а) } F_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pq}{r^3} \text{ и б) } F_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pq}{r^3}.$$

*Примечание.*

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \text{grad} \left[ (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \cdot \frac{1}{r^3} \right] = \\ &= \frac{1}{r^3} \text{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \text{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned}$$

При  $\mathbf{p} = \text{const}$   $\text{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$ , а  $\text{grad} (r^n) = nr^{n-2} \mathbf{r}$  и при

$$n = -3 \quad \text{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}.$$

Таким образом

$$\text{grad} \left( \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}.$$

**3.6.2.** Найдите выражения для энергии и силы взаимодействия (на единицу длины) двух равномер-

но заряженных, бесконечно длинных параллельных нитей с линейными плотностями заряда  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга (рис. 11). Какую работу (на единицу длины) нужно совершить, чтобы наполовину сблизить эти нити? Определите энергию и силу взаимодействия, а также работу, если  $\gamma_1 = \gamma_2 = 3 \cdot 10^{-6}$  К/м и  $r = r_0 = 2$  см.

Решение. Найдем, например, энергию нити с  $\gamma_2$  в поле нити с  $\gamma_1$ . Тогда

$$W = \int_0^1 \Phi_1 \gamma_2 dl_1 = \Phi_1 \gamma_2,$$

так как

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\gamma_1 \ln \frac{1}{r}, \quad (\Phi_{(r=1)} = 0),$$

то

$$W = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\gamma_1 \gamma_2 \ln r$$

и

$$F_2 = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\gamma_1 \gamma_2 \text{grad}(\ln r) = - \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^2}.$$

Работу найдем из условия  $A = W_2 - W_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} A &= - (1/4\pi\epsilon_0) 2\gamma_1 \gamma_2 [\ln(r/2) - \ln r] = \\ &= (1/4\pi\epsilon_0) 2\gamma_1 \gamma_2 \ln 2. \end{aligned}$$

Подставляя в полученные формулы значения  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $r$ , найдем

$$\begin{aligned} W &\approx 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/м}, \quad F_2 \approx 8,1 \text{ Н/м}, \\ A &= 0,112 \text{ Дж/м}. \end{aligned}$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Укажите размерности в единицах системы СИ и CGSE величин линейной, поверхностной и объемной плотности заряда.

4.2. При определении напряженности и потенциала электростатического поля используют представление о «пробном» точечном заряде. Что понимают под этим термином?

4.3. Можно ли дать определение напряженности

электростатического поля, опираясь на представление о «пробном» электрическом диполе? Если можно, то как это сделать?

4.4. На рис. 12 показана зависимость потенциала

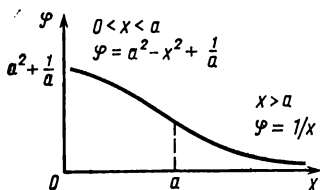


Рис. 12

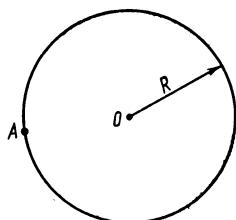


Рис. 13

электростатического поля от одной из координат. Как изменится этот график, если осуществить перенормировку потенциала? Что Вы можете сказать о величине и знаке компоненты вектора напряженности вдоль этой координаты? Сохранив масштаб вдоль  $x$ , постройте зависимость от  $x$  компоненты вектора  $\mathbf{E}$  вдоль этой координаты. Можно ли по данному графику указать область, где имеются заряды, создающие поле? Если нет, то почему? Найдите распределение заряда, создающего центральное поле, если вместо  $x$  отложена координата  $r$  в сферической системе координат (в расчетах используйте условие  $\text{div}(r^n \mathbf{r}) = (n+3)r^n$ ). Как изменится график вблизи точки  $r=a$ , если в этой точке имеется поверхностный заряд?

4.5. Найдите значения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  и соответствующие выражения для потенциала по данным решения задачи 3.3.1, полагая потенциал в точке с координатой  $r=R_1$  равным нулю.

4.6. По результатам решения задачи 3.2.3 проследите, как меняются компоненты вектора напряженности электростатического поля в случаях (а) и (б) при переходе через поверхность распределения заряда ( $z_0=0$ ). Удовлетворяет ли для этих случаев вектор  $\mathbf{E}$  граничным условиям:  $\text{Rot } \mathbf{E}=0$  и  $\text{Div } \mathbf{E}=\sigma/\epsilon_0$ ? Используя связь между  $\mathbf{E}$  и  $\phi$  в декартовых координатах, найдите потенциал произвольной точки в случаях (а) и (б).

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. При некотором соотношении между двумя точечными зарядами  $q'$  и  $q$  одной из эквипотенциальных поверхностей, охватывающей заряд  $q'$ , является сфера с центром, лежащим на прямой, соединяющей эти заряды. Предполагая, что известен радиус такой сферы  $R$ , величина заряда  $q$  и расстояние от заряда  $q$  до этой сферы, равное  $a$ , вычислите заряд  $q'$  и расстояние от заряда  $q'$  до центра сферы.

Ответ.  $q' = -qR/(a+R)$ ,  $b = R^2/(a+R)$ .

5.2. Три точечных заряда  $+q$ ,  $-2q$  и  $+q$  лежат на одной прямой на расстоянии  $a$  друг от друга. Вычислите потенциал электростатического поля в точке, лежащей на этой же прямой, достаточно удаленной от зарядов ( $r \gg a$  — линейный квадруполь).

Ответ.  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3}$ , где  $Q = 2qa^2$  — квадрупольный момент.

5.3. Вычислите среднее значение потенциала в точках, лежащих на поверхности сферы, охватывающей точечный заряд  $q$ , если центр сферы отстоит от заряда  $q$  на расстоянии  $b$ .

Ответ:  $\langle \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ ,  $\varphi_\infty = 0$ .

5.4. Вычислите потенциал и напряженность электростатического поля в точке, расположенной на оси тонкого, равномерно заряженного диска радиуса  $R$  на расстоянии  $z_0$  от его центра. Поверхностная плотность заряда диска  $\sigma$ . Рассмотрите случаи, когда  $R \gg z_0$ ,  $R \ll z_0$  и  $R/z \rightarrow \infty$ .

Ответ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left( \sqrt{R^2 + z_0^2} - z_0 \right), \quad \varphi_\infty = 0,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right);$$

$$\text{при } R \gg z_0: \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma R \left( 1 - \frac{z_0}{R} + \frac{1}{2} \frac{z_0^2}{R^2} \right),$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left(1 - \frac{z_0}{R}\right);$$

$$\text{при } R \ll z_0: \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi R^2 \sigma}{z_0}, \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi R^2 \sigma}{z_0^2};$$

$$\text{при } R/z_0 \rightarrow \infty: \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma R \left(1 - \frac{z_0}{R}\right),$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma.$$

5.5. Вычислите потенциал электростатического поля на краю тонкого диска радиуса  $R$ , заряженного поверхностным зарядом с равномерной плотностью  $\sigma$  и сравните его значение с потенциалом в центре диска (рис. 13).

$$\text{Ответ: } \varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4R\sigma, \quad \frac{\varphi_0}{\varphi_A} = \frac{\pi}{2}.$$

5.6. Линейные заряды с плотностью  $\gamma$  и  $-\gamma$  равномерно распределены вдоль бесконечно длинных параллельных нитей, находящихся на расстоянии  $2a$  друг от друга. Вычислите потенциал электростатического поля и форму эквипотенциальных поверхностей.

Ответ. Эквипотенциальные поверхности удовлетворяют уравнению (рис. 14)

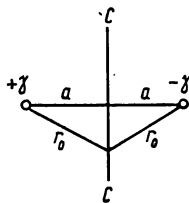


Рис. 14

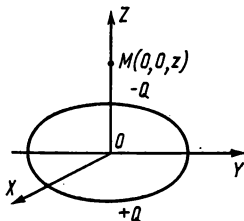


Рис. 15

$$r_2/r_1 = \text{const}$$

и представляют собой поверхности круговых цилиндров, оси которых лежат в одной плоскости с нитями и параллельны им;

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\gamma \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \varphi_{(r_0)}^{(+)} + \varphi_{(r_0)}^{(-)} = 0.$$

5.7. Для распределения линейного заряда, заданного в задаче 3.2.1, найдите выражение для потенциала произвольной точки  $M(x_0, y_0, z_0)$ .

$$\text{Ответ. } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma \ln \left[ \frac{\sqrt{r_0^2 + (l_2 - z_0)^2} + (l_2 - z_0)}{\sqrt{r_0^2 + (l_1 + z_0)^2} - (l_1 + z_0)} \right].$$

5.8. На отрезке прямого провода длиной  $l$  равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\gamma = 10^{-6}$  Кл/м. Какую работу необходимо совершить, чтобы перенести точечный заряд  $q = 10^{-10}$  Кл вдоль прямой, которая проходит через отрезок провода из точки, отстоящей на расстоянии  $l$  от его конца, в точку, удаленную на расстояние  $2l$  от того же конца?

$$\text{Ответ. } A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \gamma \ln \frac{3}{4} \approx -2,59 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

5.9. Плоскости двух тонких коаксиальных равномерно заряженных колец одинакового радиуса  $R$  находятся на расстоянии  $a$  друг от друга. Работа, которую необходимо совершить, чтобы перенести точечный заряд  $q$  из бесконечности в центр каждого из колец, равна соответственно  $A_1$  и  $A_2$ . Найдите величину зарядов на кольцах.

$$\text{Ответ. } Q_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R \sqrt{R^2 + a^2}}{qa^2} (A_1 \sqrt{R^2 + a^2} - A_2 R),$$

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R \sqrt{R^2 + a^2}}{qa^2} (A_2 \sqrt{R^2 + a^2} - A_1 R).$$

5.10. Тонкое круглое кольцо радиуса  $R$  состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами  $Q$  и  $-Q$ . Найдите потенциал и напряженность электростатического поля на оси кольца. Каков характер поля на больших расстояниях от кольца?

Ответ. В системе отсчета, выбранной так, чтобы положительно заряженное полукольцо занимало область  $x > 0$  в плоскости  $XY$  (рис. 15), имеем

$$\varphi = 0, \quad E_y = E_z = 0, \quad E_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

При  $z \gg R$  это поле эквивалентно полю диполя с моментом

$$p = 4QR/\pi.$$

5.11. Сфера радиуса  $R$  заряжена поверхностным зарядом, величина которого меняется по закону  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , где  $\sigma_0$  — постоянная величина, а  $\theta$  — угол между фиксированным диаметром сферы и радиусом, проведенным в ту же точку поверхности сферы, где находится заряд  $\sigma$ . Вычислите напряженность электростатического поля в центре сферы.

Ответ.  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi \sigma_0.$

5.12. Вычислите поток вектора напряженности электростатического поля через полусферу радиуса  $R$ , расположенную в однородном поле  $E$ , параллельном оси полусферы.

Ответ.  $N = \pi R^2 E.$

5.13. Вычислите напряженность электростатического поля и потенциал сферы, равномерно заряженной по поверхности. Радиус сферы  $R$ , заряд  $Q$ .

Ответ: для  $r < R$ :  $E_i = 0$ ,  $\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$ ;  
 для  $r > R$ :  $E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ ,  $\varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$

5.14. По поверхности полусферы радиуса  $R$  равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Используя соображения симметрии и принцип суперпозиции, определите потенциал в точках, лежащих на поверхности круга, стягивающего полусферу.

Ответ.  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi R \sigma$ ,  $\varphi_\infty = 0.$

5.15. Вычислите напряженность электростатического поля и потенциал шара, равномерно заряженного по объему. Радиус шара  $R$ , заряд  $Q$ .

Ответ: при  $r < R$ :  $E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r,$



$$\varphi_i = \frac{4}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{2R} \left( 1 - \frac{r^2}{3R^2} \right);$$

$$\text{при } r > R: E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} r,$$

$$\varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

5.16. Рассматривая атомное ядро как равномерно заряженный по объему шар, найдите максимальное значение напряженности его электростатического поля. Радиус ядра  $R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  см, где  $A$  — массовое число,  $Z$  — порядковый номер, заряд  $Ze$ .

Ответ.  $E_{\max} \cong 6,5 \cdot 10^{20} Z/A^{2/3}$  В/м.

5.17. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), заряжено с объемной плотностью  $\rho = \alpha/r^2$ , где  $\alpha$  — постоянная величина. Найдите полный заряд сферического слоя, напряженность электростатического поля и потенциал.

Ответ.  $Q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1)$ ;

$$\text{при } r < R_1: E_0 = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1};$$

$$\text{при } R_1 < r < R_2: E_i = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{R_1}{r^3} \right) r,$$

$$\varphi_i = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2} \right);$$

$$\text{при } r > R_2: E_e = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{r^3} r,$$

$$\varphi_e = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \frac{(R_2 - R_1)}{r}.$$

5.18. Внутри шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного по объему с плотностью  $\rho$ , имеется незаряженная сферическая полость, радиус которой  $R_0$ , а центр полости отстоит от центра шара на расстоянии  $a$ . Используя принцип суперпозиции, найдите напряженность электростатического поля внутри полости.

Ответ.  $E = (\rho/3\epsilon_0) a$ .

5.19. Имеются два сферических распределения заряда с плотностями  $+\rho$  и  $-\rho$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  ( $O_1O_2 < R$ ). Найдите напряженность поля в пространстве перекрытия зарядов (рис. 16).

Ответ.  
 $E = (1/4\pi\epsilon_0) (4/3)\pi\rho O_1O_2$ .

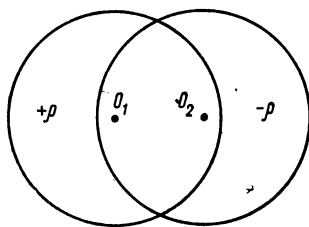


Рис. 16

5.20. Две коаксиальные цилиндрические поверхности с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) заряжены поверхностными зарядами с равномерной плотностью  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Вычислите напряженность электростатического поля и потенциал этой системы зарядов.

Ответ. при  $r < R_1$ ;  $E_0 = 0$ ;  $\varphi_0 = 0$ ;

$$\text{при } R_1 < r < R_2; \quad E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R_1 \sigma_1}{r},$$

$$\varphi_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi R_1 \sigma_1 \ln \frac{r}{R_1};$$

$$\text{при } r > R_2; \quad E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi (R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2)}{r},$$

$$\varphi_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \left( R_1 \sigma_1 \ln \frac{r}{R_1} + R_2 \sigma_2 \ln \frac{r}{R_2} \right).$$

5.21. В пространстве бесконечно длинного кругового цилиндра, равномерно заряженного по объему с плотностью заряда  $\rho$ , имеется бесконечно длинная цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси цилиндра. Используя принцип суперпозиции, вычислите напряженность электростатического поля внутри полости, если расстояние между осями цилиндра и полости равно  $a$ .

Ответ.  $E = (1/4\pi\epsilon_0) 2\pi a \rho$ .

5.22. Два круглых параллельных диска радиуса  $R$  имеют общую ось и находятся на расстоянии  $l$  друг от друга. На дисках с равномерной плотностью  $\sigma$

распределены равные по величине и противоположные по знаку электрические заряды. Используя результат решения задачи 5.4 и принцип суперпозиции, вычислите напряженность электростатического поля и потенциал в точках, лежащих на оси дисков.

Ответ. при  $|z| > \frac{l}{2}$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left\{ \frac{l+2z}{[(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} + \frac{l-2z}{[(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} \right\},$$

$$\Phi_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi\sigma \{ [(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} - [(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} \} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\sigma \frac{l}{2};$$

при  $|z| < \frac{l}{2}$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\sigma + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left\{ \frac{l+2z}{[(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} + \frac{l-2z}{[(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} \right\},$$

$$\Phi_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\sigma |z| +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi\sigma \{ [(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} - [(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} \}.$$

$z$  параллельна оси дисков с началом в точке, равноудаленной от дисков.

5.23. Бесконечная плоская плита толщиной  $T$  равномерно заряжена по объему с плотностью заряда  $\rho$ . Вычислите напряженность электростатического поля и потенциал в произвольной точке.

Ответ. внутри плиты  $\Phi_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\rho z^2,$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\rho z;$$

$$\text{вне плиты } \varphi_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi T \left( |z| + \frac{T}{4} \right),$$

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi T \frac{z}{|z|}.$$

5.24. Бесконечно плоская плита толщиной  $T$  заряжена поверхностным зарядом так, что одна ее поверхность, например  $z=T/2$ , заряжена с равномерной плотностью  $\sigma_1$ , а другая  $z=-T/2$  с плотностью  $\sigma_2$ . Вычислите напряженность электростатического поля и потенциал. Рассмотрите случай, когда  $\sigma_1=\sigma$  и  $\sigma_2=-\sigma$ .

О т в е т.

$$\text{если } |z| < \frac{T}{2}, \text{ то } E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi (\sigma_2 - \sigma_1),$$

$$\varphi_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi (\sigma_2 - \sigma_1) z, \quad \varphi_{(z=0)} = 0;$$

$$\text{если } |z| > \frac{T}{2}, \text{ то}$$

$$\begin{cases} \varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi [\sigma_1 T - (\sigma_2 + \sigma_1) z] & \text{при } z > 0; \\ \varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi [\sigma_2 T + (\sigma_2 + \sigma_1) z] & \text{при } z < 0; \\ E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi (\sigma_2 + \sigma_1) \frac{z}{|z|}. \end{cases}$$

5.25. Бесконечная плоская плита толщиной  $T$  заряжена поверхностным зарядом так, что одна поверхность, например  $z=T/2$ , заряжена по закону  $\sigma = \sigma_0 \sin(2\pi y/\lambda) y$ , а другая  $z=-T/2$  соответственно  $\sigma = -\sigma_0 \sin(2\pi y/\lambda) y$ , где  $\sigma_0$  и  $\lambda$ —постоянные величины. Используя результат решения задачи 3.2.3 и принцип суперпозиции, определите потенциал и напряженность электростатического поля этой системы зарядов.

О т в е т.

$$\begin{aligned} &\text{при } |z| < T/2 \\ \varphi_i &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda\sigma_0 \left[ \exp\left(-\frac{\pi T}{\lambda}\right) \right] \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{\lambda} |z|\right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \frac{z}{|z|}, \\ E_y = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\sigma_0 \left[ \exp \left( -\frac{\pi T}{\lambda} \right) \right] \operatorname{sh} \left( \frac{2\pi}{\lambda} |z| \right) \times \\ & \times \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \frac{z}{|z|}, \\ E_{iz} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\sigma_0 \left[ \exp \left( -\frac{\pi T}{\lambda} \right) \right] \operatorname{ch} \left( \frac{2\pi}{\lambda} |z| \right) \times \\ & \times \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \frac{z}{|z|}; \end{aligned}$$

при  $|z| > T/2$

$$\begin{aligned} \varphi_e = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda\sigma_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\pi T}{\lambda} \right) \left[ \exp \left( -\frac{2\pi}{\lambda} |z| \right) \right] \times \\ & \times \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \frac{|z|}{|z|}, \\ E_{ey} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\sigma_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\pi T}{\lambda} \right) \left[ \exp \left( -\frac{2\pi}{\lambda} |z| \right) \right] \times \\ & \times \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \frac{z}{|z|}, \\ E_{ez} = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\sigma_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\pi T}{\lambda} \right) \left[ \exp \left( -\frac{2\pi}{\lambda} |z| \right) \right] \times \\ & \times \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} y \right) \frac{z}{|z|}. \end{aligned}$$

5.26. Поместив электрический диполь с моментом  $\mathbf{p}$ , параллельным оси  $y$ , в начало прямоугольной системы координат, найдите компоненты поля диполя в точке с координатами  $x_0, y_0$ .

Ответ. 
$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3px_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}},$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}} \right].$$

5.27. Два равных по величине диполя с моментами  $\mathbf{p}$  находятся на некотором расстоянии друг от

друга и ориентированы взаимно перпендикулярно. При какой ориентации диполей относительно прямой, их соединяющей, напряженность электростатического поля посреди диполей будет минимальной и максимальной (рис. 17)?

Ответ.  $|E|_{\max}$   
при  $\theta = \frac{3}{4}\pi$ ;  $\frac{7}{4}\pi$ ,

$|E|_{\min}$  при  $\theta = \frac{1}{4}\pi$ ;  $\frac{5}{4}\pi$ .

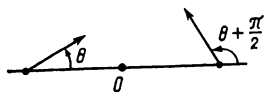


Рис. 17

5.28. Электрический диполь с моментом  $p = 10^{-12}$  Км равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, перпендикулярной вектору диполя и проходящей через его центр. Вычислите мгновенные значения потенциала и напряженности поля в точке  $M$ , лежащей в плоскости вращения диполя, на расстоянии от него  $x_0 = 2$  см в момент  $t = T/6$ . В начальный момент ( $t=0$ ) положить  $\varphi = 0$ .

Ответ.  $\varphi = (9\sqrt{3}/8) \cdot 10$  В,  $E = (9\sqrt{13}/16) \cdot 10^3$  В/м.

5.29. Пусть диполь находится в однородном электростатическом поле напряженности  $E_0$ . Если направление дипольного момента совпадает с направлением поля  $E_0$ , то существует эквипотенциальная поверхность, охватывающая диполь. Покажите, что такой поверхностью является сфера и найдите величину дипольного момента, для которого сфера имеет радиус  $R$ .

Ответ. Поверхностью нулевого потенциала является сфера радиуса  $(p/E_0)^{1/3}$ , при этом  $p = R^3 E_0$ .

5.30. Пространство внутри сферы радиуса  $R$  заполнено с равномерной плотностью  $n$  параллельными электрическими диполями одинаковой величины  $p$ . Вычислите потенциал и напряженность электростатического поля в точках вне сферы, лежащих на прямой, проходящей через центр сферы и параллельной направлению диполей.

Ответ.  $\varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} V \frac{np}{z^2}$ ,  $E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2V \frac{np}{z^3}$ ,

где  $V = (4/3)\pi R^3$  — объем сферы, а  $z$  — расстояние от центра сферы до точки поля.

5.31. Вычислите потенциальную энергию системы зарядов, распределение которых задано в условиях задачи 3.1.1.

О т в е т.

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left[ q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_4 + q_1q_4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (q_1q_3 + q_2q_4) \right],$$

$$\text{а) } W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} (4 + \sqrt{2});$$

$$\text{б) } W = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} (4 - \sqrt{2});$$

$$\text{в) } W = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^3}{a} \sqrt{2}.$$

5.32. Две коаксиальные цилиндрические поверхности с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) заряжены с равномерной плотностью поверхностными зарядами так, что на единицу их длины приходятся заряды  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно. Вычислите потенциальную энергию этой системы зарядов. Рассмотрите случаи, когда: а)  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  и б)  $\gamma_1 = \gamma$ ,  $\gamma_2 = -\gamma$ .

О т в е т.

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma_1\gamma_2 \ln \frac{R_2}{R_1}, \text{ а) } W = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \gamma^2 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$\text{б) } W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \gamma^2 \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

5.33. Пространство, ограниченное бесконечно длинным круговым цилиндром радиуса  $R$ , заряжено по объему с равномерной плотностью  $\rho$ . Вычислите потенциальную энергию, приходящуюся на единицу длины, для этой системы зарядов.

$$\text{О т в е т. } W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\pi R^2 \rho)^2}{4}.$$

5.34. Две концентрические сферические поверхности с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) заряжены с равно-

мерной плотностью зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно. Вычислите потенциальную энергию этой системы зарядов. Рассмотрите случаи, когда: а)  $Q_1=Q_2=Q$  и б)  $Q_1=Q$ ,  $Q_2=-Q$ .

Ответ.  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1^2}{R_1} + 2 \frac{Q_1 Q_2}{R_2} + \frac{Q_2^2}{R_2} \right),$

а)  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{3}{R_2} \right);$

б)  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$

5.35. Вычислите потенциальную энергию заряда  $Q$ , равномерно распределенного а) по поверхности сферы радиуса  $R$ , б) по объему сферы радиуса  $R$ .

Ответ.

а)  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{R};$  б)  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}.$

5.36. В классической электронной теории электрон рассматривается как шарик радиуса  $r_0$  с зарядом  $e=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, равномерно распределенным по объему. Вычислите по этой модели собственную энергию электрона. Считая собственную энергию электрона равной  $m_0 c^2$  (где  $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса покоя электрона, а  $c=3 \cdot 10^8$  м/с — скорость света), определите классический радиус электрона.

Ответ.  $r_0 \approx 1,7 \cdot 10^{-15}$  м.

5.37. Бесконечная плоская плита толщиной  $T$  равномерно заряжена по объему с плотностью заряда  $\rho$ . Вычислите потенциальную энергию, приходящуюся на единицу поверхности плиты.

Ответ.  $W = (1/4\pi\epsilon_0) \pi \rho^2 T^3 / 12.$

5.38. Бесконечная плоская плита толщиной  $T$  заряжена поверхностным зарядом так, что одна ее поверхность, например  $Z=T/2$ , заряжена с равномерной плотностью  $\sigma_1$ , а другая  $Z=-T/2$  — с плотностью  $\sigma_2$ . Вычислите потенциальную энергию, приходящуюся на единицу поверхности для этой системы



зарядов. Рассмотрите случаи, когда а)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  
б)  $\sigma_1 = \sigma$  и  $\sigma_2 = -\sigma$ .

Ответ.  $W = (1/4\pi\epsilon_0)\pi T(\sigma_2 - \sigma_1)^2/2$ ;  
а)  $W = 0$ ; б)  $W = (1/4\pi\epsilon_0)2\pi\sigma^2 T$ .

5.39. Бесконечная плоская плита толщиной  $T$  заряжена поверхностным зарядом так, что одна ее поверхность, например  $z = T/2$  заряжена по закону  $\sigma = \sigma_0 \sin((2\pi/\lambda)y)$ , а другая  $z = -T/2$  соответственно  $\sigma = -\sigma_0 \sin((2\pi/\lambda)y)$ , где  $\sigma_0$  и  $\lambda$  — постоянные величины. Вычислите среднее значение потенциальной энергии, приходящейся на единицу поверхности для этой системы зарядов.

Ответ.  $\langle W \rangle = (1/4\pi\epsilon_0)(\lambda/2)(\sigma_0)^2[1 - \exp(-2\pi T/\lambda)]$ .

5.40. Плоскость  $z = 0$  заряжена поверхностным зарядом, плотность которого меняется только в направлении оси  $Y$  по закону  $\sigma(y) = \sigma_0$ , если  $m\lambda < y < (2m+1)\lambda/2$ , и по закону  $\sigma(y) = -\sigma_0$ , если  $(2m+1)\lambda/2 < y < (m+1)\lambda$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а  $\sigma_0$  и  $\lambda$  — постоянные величины. (График распределения плотности заряда

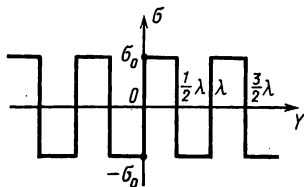


Рис. 18

показан на рис. 18.) Вычислите напряженность электростатического поля и потенциал, а также среднее значение потенциальной энергии, приходящейся на единицу поверхности для этой системы зарядов.

Ответ.

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 8\sigma_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ \exp\left(-\frac{2\pi k}{\lambda}|z|\right) \right] \times \\ \times \cos\left(\frac{2\pi k}{\lambda} y\right),$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 8\sigma_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[ \exp\left(-\frac{2\pi k}{\lambda}|z|\right) \right] \times \\ \times \sin\left(\frac{2\pi k}{\lambda} y\right) \frac{z}{|z|},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\sigma_0\lambda}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[ \exp\left(-\frac{2\pi k}{\lambda} |z|\right) \right] \times$$

$$\times \sin\left(\frac{2\pi k}{\lambda} y\right),$$

$$\langle W \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\sigma_0^2\lambda}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 0,43 \sigma_0^2 \lambda, \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots$$

5.41. Мыльный пузырь из проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\lambda$  несет на себе электрический заряд  $Q$ . Определите избыточное давление внутри пузыря, если его радиус равен  $R$ .

Ответ.  $\Delta p = \frac{2\lambda}{R} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$ , где  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ .

5.42. Две капельки жидкости радиуса  $R$  несут на себе каждая заряд  $Q$ , распределенный по их поверхности. Сначала эти капельки находились на достаточно большом расстоянии друг от друга, а затем их сблизили до соприкосновения, в результате чего они слились. Определите изменение потенциальной энергии жидкости, если ее коэффициент поверхностного натяжения равен  $\lambda$ . Определите также условие, при котором изменение энергии будет равно нулю. Как изменяются полученные соотношения, если заряд капелек распределен не по поверхности, а равномерно по их объему?

Ответ.

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} (2^{2/3} - 1) + 2\lambda \cdot 4\pi R^2 (2^{-1/3} - 1).$$

При

$$\Delta W = 0 \quad R^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q^2 (2^{2/3} - 1)}{4\pi\lambda (1 - 2^{-1/3})}.$$

Для объемного распределения заряда в записанных формулах перед величиной  $Q^2$  следует поставить коэффициент, равный  $2 \cdot 3/5$ .

5.43. Частица с дипольным моментом  $\mathbf{p}$  помещена на расстоянии  $r$  от длинного провода, на единицу длины которого приходится заряд  $\gamma$  ( $\gamma$  — постоянная величина). Определите силу и момент силы, действующие на частицу, если: а) вектор  $\mathbf{p}$  направлен нормально к проводу и б) вектор  $\mathbf{p}$  параллелен проводу.

Ответ. а)  $F_r = (1/4\pi\epsilon_0) 2\gamma pr^{-2}$ ,  $L = 0$ ;

б)  $F_r = 0$ ,  $L = (1/4\pi\epsilon_0) 2\gamma pr^{-1}$ .

5.44. Электроды двухэлектродной лампы (диода) имеют форму нити радиуса  $R_1 = 0,1$  мм (катод) и коаксиального с ней цилиндра радиуса  $R_2 = 2,72$  мм (анод). На электроды подано напряжение  $U = 100$  В. Найдите силы  $f_e$  и  $f_p$ , которые испытывают электрон и молекула воды, если их поместить в точку на расстоянии  $r_0 = 1$  мм от оси катода. Дипольный момент молекул воды  $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$  Кл·м.

Ответ.  $f_e = 0,49 \cdot 10^{-14}$  Н;  $f_p = -0,19 \cdot 10^{-21}$  Н.

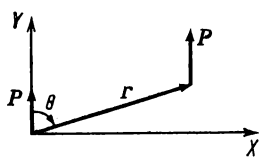


Рис. 19

5.45. Два параллельных диполя с моментом  $\mathbf{p}$  лежат в одной плоскости и образуют одинаковые углы  $\theta$  с прямой, соединяющей диполи. Вычислите силу взаимодействия между диполями. При каких углах  $\theta$  эта сила максимальна? (рис. 19)

Ответ.

$$\mathbf{F} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p^2}{r^4} (1 - 3\cos^2\theta) \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p^2}{r^4} \sin 2\theta \right] \mathbf{e}_\theta,$$

где  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  — единичные орты сферических координат;

$$|\mathbf{F}| = F_{\max} = (1/4\pi\epsilon_0) 6p^2 r^{-4} \text{ при } \theta = 0, \pi.$$

5.46. Два электрических диполя с моментами  $p_1 = 10^{-12}$  Кл·м и  $p_2 = 4 \cdot 10^{-12}$  Кл·м находятся на расстоянии  $r = 2$  см друг от друга. Вычислите взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую

щую их устойчивому равновесию и определите силу их взаимодействия.

Ответ.  $W = -9 \cdot 10^{-9}$  Дж,  $F = 1,35 \cdot 10^{-6}$  Н.

5.47. Вычислите потенциальную энергию точечного заряда  $q$ , находящегося в поле электрического диполя с моментом  $p$  на расстоянии  $r$  от диполя.

Ответ.  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(p \cdot r)}{r^3}$ .

5.48. Электрический диполь с моментом  $p_1 = 10^{-12}$  Кл·м находится в однородном поле напряженностью  $E_0 = 10^4$  В/м и образует с направлением поля угол  $\alpha = 30^\circ$ . Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить угол  $\alpha$  в два раза?

Ответ.  $A = (\sqrt{3}/2 - 1/2) \cdot 10^{-8}$  Дж.

5.49. Электрический диполь с моментом  $p = 10^{-10}$  Кл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью  $E_0 = 9 \cdot 10^4$  В/см. Если вектор  $p$  образует с направлением поля малый угол, то свободный диполь будет совершать гармонические колебания около направления поля. Определите частоту колебаний, если момент инерции диполя относительно его центра равен  $I = 4 \cdot 10^{-12}$  кг·м<sup>2</sup>.

Ответ.  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{pE_0}{I}} = \frac{3}{4\pi} \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>.

5.50. Диполь с электрическим моментом  $p = 10^{-10}$  Кл·м прикреплен к упругой нити так, что вектор диполя перпендикулярен нити. При возбуждении в области диполя однородного электрического поля напряженностью  $E_0 = 3 \cdot 10^3$  В/м, перпендикулярного направлению нити и вектора диполя, он поворачивается на угол  $\alpha = 30^\circ$ . Определите постоянную кручения нити, т. е. упругий момент, который вызывает закручивание нити на один радиан.

Ответ.  $D = 9 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{-7}$  Н·м/рад.

5.51. Два диполя с моментами  $p_1$  и  $p_2$ , которые лежат в одной плоскости на расстоянии  $r$  друг от друга, образуют с прямой, соединяющей диполи, углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно. Вычислите энергию взаи-

модействия диполей. Чему равна эта энергия, когда ориентация диполей соответствует случаям, указанным на рис. 20?

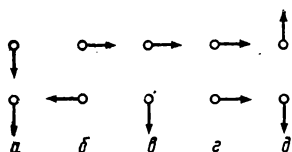


Рис. 20

Ответ.

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3} [3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)];$$

а)  $W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1 p_2}{r^3},$

б)  $W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3},$  в)  $W = 0,$

г)  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1 p_2}{r^3},$  д)  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3}.$

5.52. Вычислите потенциальную энергию, приходящуюся на один диполь с моментом  $\mathbf{p}$ , расположенной в неограниченной линейной цепочке таких же диполей, взаимная ориентация которых указана на рис. 21. Расстояние между соседними диполями равно  $a$ .

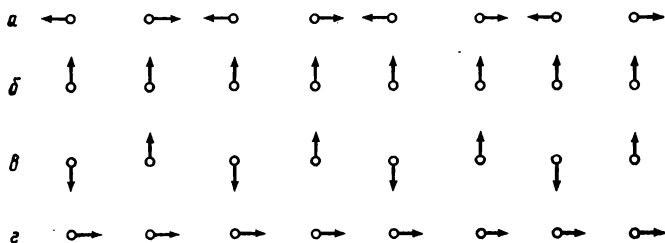


Рис. 21

Ответ.

а)  $W \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 1,8 \frac{p^2}{a^3};$  б)  $W \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 1,2 \frac{p^2}{a^3};$

в)  $W \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 0,9 \frac{p^2}{a^3};$  г)  $W \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2,4 \frac{p^2}{a^3}.$

## Раздел III

### ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ

#### 1. Теоретический материал

Проводники в электростатическом поле. Напряженность поля у поверхности и внутри проводника. Индуцированные заряды. Качественная картина распределения индуцированных зарядов по поверхности проводника.

Электрическое поле уединенного заряженного проводника. Качественная картина распределения заряда по поверхности заряженного проводника. Поверхностная дивергенция. Потенциал и электроемкость уединенного заряженного проводника.

Электрическое поле системы заряженных проводников. Дифференциальные уравнения поля заряженных проводников. Основная задача электростатики проводников. Теорема единственности.

Энергия электростатического поля проводников. Коэффициенты емкости и электростатической индукции. Конденсаторы. Соединения конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора.

Сила, действующая на поверхность заряженного проводника. Электростатическое натяжение. Сила и вращающий механический момент, действующие на проводник, находящийся во внешнем электростатическом поле. Эффект формы.

Метод зеркальных отображений и его применение для решения задач электростатики.

Потенциал и поле заряженного проводящего эллипсоида. Распределение заряда по поверхности заряженного проводящего эллипсоида и его электроемкость.

Незаряженный проводящий эллипсоид во внешнем однородном поле. Поле индуцированных на поверхности эллипсоида зарядов. Факторы формы и их значения для предельных эллипсоидов вращения.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Что следует понимать под термином «проводник» в электростатике?

2.2. Почему линии напряженности электростатического поля вблизи поверхности проводника перпендикулярны этой поверхности?

2.3. Покажите, что напряженность поля внутри любой полости проводника равна нулю (электростатическая защита).

2.4. Опишите качественно характер распределения заряда по поверхности заряженного проводника. Какие опыты подтверждают Ваше описание? Какому условию должно удовлетворять распределение заряда?

2.5. Что должно быть известно в системе заряженных проводников для решения основной задачи электростатики? (Определение поля в пространстве между проводниками). Докажите теорему единственности.

2.6. Какая существует связь между зарядами на проводниках и их потенциалами для системы заряженных проводников? На каком основании получена эта связь?

2.7. Почему коэффициенты емкости — положительные числа, а коэффициенты электростатической индукции — отрицательные? От чего зависит величина этих коэффициентов? Что такое конденсатор и какую величину называют электроемкостью конденсатора?

2.8. Напишите выражение для силы, действующей на единицу поверхности заряженного проводника. Чему равна полная сила, действующая на заряженный проводник? Опишите качественно, к каким эффектам приводит действие этой силы.

2.9. В чем состоит метод зеркальных отображений, который используется для решения многих задач электростатики проводников?

## 3. Основные типы задач и методы их решения

### (а) Классификация

3.1. Применение метода зеркальных отображений для определения потенциала и напряженности электростатического поля, созданного точечным зарядом

(системой зарядов) или диполем вблизи проводника, и силы взаимодействия этих зарядов с зарядами, индуцированными на поверхности проводника.

Метод решения. Определение поля, созданного точечным зарядом (или системой зарядов) и их изображением, для которого поверхность проводника является эквипотенциальной.

3.2. Определение напряженности поля вблизи поверхности заряженного проводника и силы, действующей на единицу поверхности проводника (электростатическое «натяжение»).

Метод решения. Использование соотношений, определяющих напряженность поля вблизи поверхности проводника и электростатическое «натяжение».

$$E = (\sigma/\epsilon_0)n, \quad f = (\sigma^2/2\epsilon_0)n = \epsilon_0 E^2 n/2.$$

где  $n$  — единичная положительная нормаль к поверхности проводника.

3.3. Определение емкости уединенного проводника, емкости конденсатора и «батарей» конденсаторов.

Метод решения. Использование соотношений, определяющих емкость уединенного проводника и конденсатора

$$C = Q/\varphi \quad \text{и} \quad C = |Q/\Delta\varphi|,$$

где для конденсатора  $Q$  — заряд одной из его обкладок, а  $\Delta\varphi$  — разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Для определения емкости «батарей» конденсаторов используются закон сохранения заряда и формула электроемкости конденсатора.

3.4. Определение энергии заряженного конденсатора.

Метод решения. Использование формулы для энергии заряженного конденсатора

$$W = (1/2) Q\Delta\varphi = (1/2) C (\Delta\varphi)^2 = Q^2/2C.$$

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $a$  от заземленной проводящей плоскости. Определите напряженность поля, созданного зарядом  $q$  и инду-



цированными на проводнике зарядами, распределение индуцированных зарядов и силу взаимодействия заряда  $q$  с проводящей плоскостью.

Решение. Изображением заряда  $q$  является заряд  $q' = -q$ , отстоящий на расстоянии  $a$  по другую сторону плоскости (рис. 22). По определению

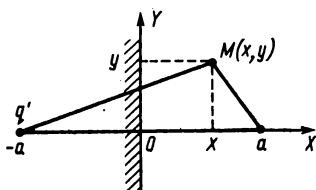


Рис. 22

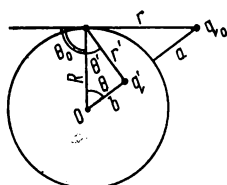


Рис. 23

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

поэтому для компонент поля в плоскости  $z=0$  получим

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{a-x}{[y^2 + (a-x)^2]^{3/2}} + \frac{a+x}{[y^2 + (a+x)^2]^{3/2}} \right\};$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y}{[y^2 + (a-x)^2]^{3/2}} + \frac{y}{[y^2 + (a+x)^2]^{3/2}} \right\}.$$

У поверхности проводника ( $x=0$ )  $E_y=0$ ,  $E_x = (1/4\pi\epsilon_0) 4\pi\sigma'$ , поэтому

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Сила взаимодействия равна

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}.$$

В произвольной точке проводящей плоскости с координатой  $y, z$

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi} \frac{2qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}}, \text{ где } r^2 = x^2 + y^2.$$

## II-й тип задач (3.2)

3.2.1. Если бы поверхностная плотность электрического заряда Земли была эквивалентна одному электрону на  $1 \text{ м}^2$ , то каков был бы потенциал Зем-

ли и какова была бы напряженность поля у ее поверхности?

Решение. Рассматривая Землю как сферу, заряженную с равномерной плотностью зарядом  $Q = 4\pi(R_3)^2\sigma$ , получим для потенциала

$$\varphi_3 = (1/4\pi\epsilon_0)Q/R_3 \approx 0,11 \text{ В}, \quad \varphi_\infty = 0.$$

Напряженность поля найдем из условия  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Тогда  $E \approx 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ В/м}$ .

**3.2.2.** Чему равна сила, действующая на точечный заряд  $q_0$ , расположенный на расстоянии  $a$  от поверхности заземленной проводящей сферы радиуса  $R$ . Чему равна поверхностная плотность индуцированных на сфере зарядов?

Решение. Так как поверхность сферы эквипотенциальна, то поле заряда  $q_0$  и зарядов, индуцированных на поверхности сферы, эквивалентно полю точечных зарядов  $q$  и  $q'$ , причем  $q' = -q_0R(a+R)^{-1}$ ,  $b = R^2(a+R)^{-1}$  (рис. 23) (см. решение задачи 5.1 разд. I). Поэтому сила взаимодействия

$$F = -(1/4\pi\epsilon_0)(q_0)^2R(a+R)a^{-2}(a+2R)^{-2}.$$

Поверхностную плотность индуцированных на сфере зарядов найдем из условия  $\sigma' = \epsilon_0 E_n$ , где  $E_n$  — нормальная к поверхности сферы компонента поля ( $E_n = |E|$ ). Поэтому

$$\sigma' = -(1/4\pi)[q_0r^{-2}\cos\theta_0 + q'(r')^{-2}\cos\theta'].$$

Учитывая, что  $\cos\theta_0 = ((a+R)\cos\theta - R)r^{-1}$ ,  $\cos\theta' = (R - b\cos\theta)(r')^{-1}$ ,  $r^2 = R^2 + (a+R)^2 - 2R(a+R)\cos\theta$ ,  $r'^2 = R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta$  и что  $q' = -q_0R(a+R)^{-1}$ ,  $b = R^2(a+R)^{-1}$ , получим  $\sigma' = -(q_0/4\pi)a(a+2R)R^{-1}[R^2 + (a+R)^2 - 2R \times (a+R)\cos\theta]^{-3/2}$ .

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Два длинных провода диаметром  $d = 1 \text{ мм}$  каждый расположены параллельно друг другу. Расстояние между их осями  $b = 14 \text{ мм}$ . Найдите взаимную емкость проводов  $C_1$ , приходящуюся на единицу их длины.

Решение. Потенциал произвольной точки пространства, созданный заряженными разноименно про-

водниками, равен (см. решение задачи 5.6 разд. II).

$$\varphi(M) = (1/4\pi\epsilon_0) 2\gamma \ln(r_2/r_1).$$

Потенциалы самих проводников будут соответственно равны

$$\varphi_1 = (1/4\pi\epsilon_0) 2\gamma \ln(b-R) R^{-1}$$

$$\text{и } \varphi_2 = (1/4\pi\epsilon_0) 2\gamma \ln R(b-R)^{-1}.$$

По определению  $C_1 = |\gamma/\Delta\varphi|$ , поэтому

$$C_1 = \pi\epsilon_0 / \ln(2b-d) d^{-1}.$$

Для  $d=1$  мм,  $b=14$  мм, получим  $C_1 \approx 1,2 \cdot 10^{-11}$  Ф/м.

#### IV-й тип задач (3.4).

**3.4.1.** Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C=1$  мкФ зарядили до разности потенциалов  $\Delta\varphi=300$  В и отключили от источника напряжения. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами конденсатора в пять раз? Какова будет после этого разность потенциалов между пластинами?

**Решение.** По определению  $A=W_2-W_1$ , где  $W_2=Q^2/2C_2$  и  $W_1=Q^2/2C_1$ . По условию  $C_1/C_2=5$  и  $Q=C_1\Delta\varphi$ . Поэтому

$$A = \frac{C_1(\Delta\varphi)_1^2}{2} \left( \frac{C_1}{C_2} \right) = 0,72 \text{ Дж},$$

$$(\Delta\varphi)_2 = \frac{C_1}{C_2} (\Delta\varphi)_1 = 1500 \text{ В}.$$

## 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Энергия взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  определяется соотношением

$$W = (1/4\pi\epsilon_0) q_1 q_2 r^{-1}.$$

Почему в выражении для энергии взаимодействия точечного заряда  $q$  с его изображением в проводящей плоскости (аналогично и для диполя) стоит коэффициент «1/2»? Объясните его происхождение.

**4.2.** Как экспериментально определить электроемкость уединенного проводника и конденсатора?

**4.3.** Какие эффекты ограничивают создание электростатических полей очень большой напряженности?

**4.4.** Если незаряженное проводящее тело поместить во внешнее электростатическое поле, то как изменится энергия этого поля? Какую работу необходимо совершить, чтобы удалить незаряженный проводящий шар радиуса  $R$  из области однородного внешнего поля в область, где это поле пренебрежимо мало?

**4.5.** Как изменится емкость плоского конденсатора, если посередине между его пластинами поместить тонкую проводящую пластину таких же размеров, как и пластины конденсатора? Какую работу необходимо совершить, чтобы удалить эту пластину из конденсатора в случаях, когда на конденсаторе сохраняются заряд и когда неизменяемой остается разность потенциалов?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

**5.1.** Максимальная напряженность электрического поля, которое может существовать на поверхности проводника, граничащего с вакуумом, по порядку величины равна  $10^8$  В/м. Полагая, что поверхностный заряд, создающий это поле, отрицателен, сравните число избыточных электронов с числом атомов, приходящихся на ту же площадь.

Ответ:  $n_A/n_e \sim 10^3$ .

**5.2.** Точечный заряд  $q = 2 \cdot 10^{-8}$  Кл находится на расстоянии  $a = 40$  мм от заземленной плоской металлической стенки. Определите силу  $f$ , с которой стенка притягивает к себе заряд, и плотность наведенных на стенке зарядов в точке, которая отстоит от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на стенку, на расстоянии  $r_0 = 30$  мм.

Ответ.  $j \approx 0,56 \cdot 10^{-3}$  Н;  $\sigma' \approx 2 \cdot 10^{-6}$  Кл/м<sup>2</sup>.

**5.3.** Используя метод электрических изображений, найдите положение зарядов, которые являются изображением заряда  $q$ , помещенного внутри двугранного угла между двумя заземленными проводя-

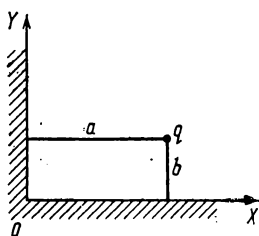


Рис. 24

щими плоскостями. Рассмотрите случаи, когда двугранный угол равен  $\pi/2$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/4$ .

5.4. Методом изображений найдите силу, действующую на заряд  $q$ , помещенный на расстоянии  $a$  и  $b$  от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол (рис. 24).

Ответ.

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4} \left[ \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2} \right],$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4} \left[ \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}} - \frac{1}{b^2} \right].$$

5.5. Представьте себе плоскости  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$ , сделанные из металла и спаянные в местах пересечений. Точечный заряд  $q$  расположен на расстоянии  $d$  от каждой из плоскостей. Изобразите на чертеже конфигурацию «мнимых зарядов», которая необходима для удовлетворения граничных условий. Каковы направление и величина силы, которая действует на заряд  $q$ ?

Ответ.

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2} \left( \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \right).$$

Сила  $\mathbf{F}$  направлена к точке пересечения плоскостей.

5.6. Чему равна сила, действующая на точечный заряд  $q_0$  со стороны заряженной изолированной проводящей сферы радиуса  $R$ , если ее потенциал равен  $\phi$ , а заряд  $q_0$  находится на расстоянии  $a$  от поверхности сферы ( $\phi_\infty = 0$ ).

Ответ.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \left[ \frac{4\pi\epsilon_0\phi R}{(a+R)^2} - q_0 \frac{R(a+R)}{a^2(a+2R)^2} \right]$$

( $\mathbf{F}$  — сила отталкивания заряда  $q$  от заряженной сферы).

5.7. В точке  $M$  на расстоянии  $a$  от безграничной проводящей плоскости находится точечный заряд  $q$ . Вычислите энергию взаимодействия заряда  $q$  с зарядами, индуцированными на поверхности проводящей плоскости. Решите аналогичную задачу, если в точке  $M$  вместо точечного заряда находится диполь с моментом  $p$ , образующий угол  $\theta$  с нормалью к плоскости.

Ответ. Для точечного заряда

$$W = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2a},$$

для диполя

$$W = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{(2a)^3} (\cos^2 \theta + 1).$$

5.8. Электрический диполь с моментом  $p$  находится на расстоянии  $x_0$  от неограниченной проводящей плоскости. Определите энергию взаимодействия диполя с проводящей плоскостью и силу притяжения диполя к плоскости, если угол между вектором  $p$  и прямой, соединяющей плоскость и диполь, соответственно равен  $\theta=0$  и  $\theta=\pi/2$ .

Ответ. Для  $\theta=0$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{(2x_0)^3}, \quad F_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6p^2}{(2x_0)^4};$$

$$\text{для } \theta = \pi/2 \quad W = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{(2x_0)^3}, \quad F_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p^2}{(2x_0)^4}.$$

5.9. В центре проводящей незаряженной изолированной сферы радиуса  $R$  находится диполь с моментом  $p$ . Определите потенциал и напряженность электростатического поля, созданного диполем и зарядами, индуцированными на поверхности сферы, а также распределение плотности индуцированных зарядов по поверхности сферы.

Ответ.

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (p \cdot r) \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right],$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{p}{R^3} + \left[ \frac{3(p \cdot r)r}{r^5} - \frac{p}{r^3} \right] \right\}, \quad \sigma' = \frac{p}{4\pi R^3} \cos \theta.$$

**5.10.** Обкладкам сферического конденсатора (такого, что внешняя обкладка его может сжиматься, сохраняя строго сферическую форму и оставаясь концентричной с внутренней жесткой обкладкой) сообщаются заряды противоположного знака, но одинаковой величины  $Q = 2 \cdot 10^{-6}$  Кл. После этого под действием электростатических сил внешняя обкладка сжимается, в результате чего ее радиус уменьшается от величины  $R_1 = 100$  мм до величины  $R_2 = 95$  мм. Найдите совершенную электрическими силами работу.

Ответ.  $A = 9 \cdot 10^{-3}$  Дж.

**5.11.** Плоский воздушный конденсатор с площадью пластины  $S = 500$  см<sup>2</sup> подключен к батарее, ЭДС которой  $\mathcal{E} = 300$  В. Определите работу внешних сил по раздвижению пластин от  $d_1 = 1$  см до  $d_2 = 3$  см в случаях: а) перед раздвижением пластины отключаются от батареи; б) пластины в процессе раздвижения остаются подключенными к батарее.

Ответ. а)  $A \approx 3,9$  мкДж; б)  $A \approx 2,66$  мкДж.

**5.12.** Если заряженный зарядом  $Q$  проводящий шар радиуса  $R$  мысленно разрезать на две половинки, то чему будет равна сила взаимодействия между ними?

Ответ.  $F = (1/4\pi\epsilon_0) Q^2 (8R^2)^{-1}$ .

**5.13.** Если незаряженный проводящий шар радиуса  $R$ , находящийся во внешнем однородном поле  $E_0$ , мысленно разрезать на две половинки плоскостью, перпендикулярной внешнему полю, то чему будет равна сила взаимодействия между ними?

Ответ.  $F = 4\pi\epsilon_0 9(16)^{-1} R^2 (E_0)^2$ .

## Раздел IV

### ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ

#### 1. Теоретический материал

Диэлектрики в электростатическом поле. Дипольное описание макроскопических свойств диэлектриков. Вектор поляризации. Индуцированные (связан-

ные) электрические заряды в диэлектрике. Объемная и поверхностная плотность индуцированных зарядов и их связь с вектором поляризации. Потенциал и напряженность электростатического поля, созданного поляризованным диэлектриком. Дифференциальные уравнения электростатического поля в присутствии диэлектриков. Граничные условия. Вектор индукции электростатического поля. Диэлектрический эллипсоид в однородном поле. Напряженность электростатического поля внутри диэлектрического эллипсоида. Деполяризующее поле. Поле внутри малой полости в диэлектрике. Локальное поле Лоренца. Однородный изотропный диэлектрик. Связь между векторами поляризации и напряженности электростатического поля. Восприимчивость и проницаемость диэлектриков. Связь между вектором поляризации диэлектрического эллипсоида и напряженностью внешнего однородного поля. Восприимчивость тела.

Диэлектрические шар, бесконечно тонкий плоский слой и бесконечно длинный цилиндр в однородном поле. Векторы индукции и напряженности поля внутри этих диэлектриков. Граничные условия для вектора индукции. Энергия электростатического поля в присутствии диэлектриков и ее объемная плотность. Энергия заряженного конденсатора с диэлектриком. Пондермоторные силы, действующие на диэлектрик. Действие квазиоднородного поля на диэлектрический шар и сферическую полость в диэлектрике. Действие однородного поля на диэлектрический эллипсоид. Восприимчивость неполярных диэлектриков. Формула Клаузиуса — Моссоti. Сравнение с экспериментом. Восприимчивость полярных диэлектриков. Температурная зависимость восприимчивости. Закон Кюри. Сегнетоэлектрики и их основные свойства. Температура Кюри. Восприимчивость сегнетоэлектриков. Петля гистерезиса. Прямой и обратный пьезоэффект.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Что следует понимать под термином «поляризованный» диэлектрик? Что мы называем вектором поляризации? Каков его физический смысл? Ка-



кими единицами измеряется вектор поляризации в единицах системы СИ и CGSE?

2.2. Что такое деполяризующее поле? Как определить деполяризующее поле, если известна функция распределения вектора поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  внутри данного диэлектрика? Чему равно деполяризующее поле диэлектрического эллипсоида?

2.3. Какой диэлектрик мы называем однородным и изотропным? Что можно сказать о функции распределения вектора поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  для однородного и изотропного диэлектрика?

2.4. Какая существует связь между вектором поляризации и вектором напряженности электростатического поля для однородного и изотропного диэлектрика? Что называется восприимчивостью диэлектрика? Каков физический смысл этого понятия? Как различаются восприимчивости в системах единиц СИ и CGSE? Какая связь между восприимчивостью и проницаемостью в этих системах единиц? Что понимают под восприимчивостью диэлектрического тела?

2.5. Какую величину мы называем вектором индукции электростатического поля? Какими единицами измеряется вектор индукции в единицах системы СИ и CGSE? Запишите условия, которым удовлетворяют векторы напряженности и индукции электростатического поля на границе раздела двух однородных и изотропных диэлектриков.

2.6. Как определить силу и вращающий механический момент, действующие на диэлектрик во внешнем электростатическом поле?

2.7. В чем разница и сходство в понятиях микрополе, которое используется в классической электронной теории, и макрополе, используемое классической электродинамикой при описании свойств среды? При определении макрополя используют представления о физически бесконечно малом объеме. Дайте определение такому объему.

2.8. Какие представления лежат в основе микроскопического описания свойств диэлектриков? Какие диэлектрики называют полярными и неполярными? Что можно сказать о восприимчивости полярных и неполярных диэлектриков? Какой вид имеет тензор

поляризуемости молекулы и каковы его основные свойства?

**2.9.** Какой класс диэлектриков мы называем сегнетоэлектриками? Как спонтанная поляризация сегнетоэлектриков зависит от температуры? Что понимают под термином сегнетоэлектрический домен? Как поляризация и восприимчивость сегнетоэлектриков зависят от напряженности электростатического поля? Чем обусловлен сегнетоэлектрический гистерезис?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Классификация

**3.1.** Определение потенциала  $\varphi'$  и напряженности  $E'$  электростатического поля, созданного поляризованным диэлектриком, для заданного распределения в нем вектора поляризации  $P(r)$ .

Метод решения. Использование формул, определяющих потенциал и напряженность поля заданного распределения электрических зарядов  $\rho'(r)$  и  $\sigma'(r)$ , связанных с заданной функцией распределения вектора поляризации соотношениями

$$\rho' = -\operatorname{div} P, \quad \sigma' = -\operatorname{div} P.$$

**3.2.** Определение распределения векторов поляризации, напряженности и индукции электростатического поля внутри однородного, изотропного диэлектрика с заданной восприимчивостью (или проницаемостью), находящегося во внешнем поле.

Метод решения. Использование соотношений, связывающих между собой векторы поляризации, напряженности и индукции электростатического поля внутри однородного изотропного диэлектрика

$$D = \epsilon' \epsilon_0 E, \quad P = \kappa \epsilon_0 E, \quad D = \epsilon_0 E + P, \quad \kappa = \epsilon' - 1,$$

где  $\epsilon'$  — относительная проницаемость.

**3.3.** Определение силы, действующей на маленький диэлектрический шарик со стороны внешнего квазиоднородного поля, и вращающего механического момента, действующего на диэлектрический эллипсоид во внешнем однородном поле.

Метод решения. Использование соотношений, определяющих величину силы  $\mathbf{F}$  и момента сил  $\mathbf{L}$ , действующих со стороны внешнего поля  $\mathbf{E}_0$  на шарик и эллипсоид:

$$\mathbf{F} = -(\mathcal{P}_{\text{ш}} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0 \quad \text{и} \quad \mathbf{L} = [\mathcal{P}_{\text{эл}} \times \mathbf{E}_0],$$

где  $\mathcal{P}_{\text{ш}}$  и  $\mathcal{P}_{\text{эл}}$  — электрические моменты шарика и эллипсоида соответственно.

**3.4. Определение емкости и энергии конденсатора, заполненного однородным изотропным диэлектриком.**

Метод решения. Использование соотношения, определяющего емкость конденсатора, заполненного одним или несколькими однородными изотропными диэлектриками, и выражения для энергии такого конденсатора.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1. Однородный изотропный диэлектрик с восприимчивостью  $\kappa$ , имеющий форму шара, помещен в однородное внешнее поле  $\mathbf{E}_0$ . Определите поверхностную плотность наведенных на поверхности диэлектрика зарядов в точке, для которой радиус сферы образует с направлением поля угол  $\theta$ . Рассмотрите случай, когда сфера является проводником ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) (рис. 25).**

Решение. По определению  $\sigma' = P_n = P \cos \theta$ . Так как  $\mathbf{P} = 3\kappa\epsilon_0(3 + \kappa)^{-1}\mathbf{E}_0$ , то  $\sigma' = 3\kappa(3 + \kappa)^{-1}\epsilon_0 E_0 \cos \theta$ . Для  $\kappa \rightarrow \infty$  получим  $\sigma' = 3\epsilon_0 E \cos \theta$ .

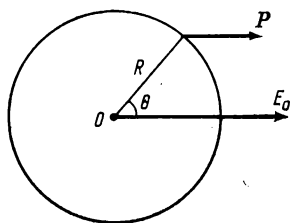


Рис. 25

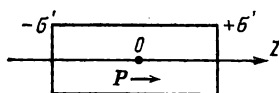


Рис. 26

**3.1.2. Сегнетоэлектрик**, имеющий форму цилиндра радиуса  $R$  и высотой  $l$ , однородно поляризован ( $\mathbf{P} = \text{const}$ ) в направлении оси цилиндра вследствие спонтанной поляризации (рис. 26). Вычислите напряженность и потенциал электростатического поля, созданного поляризованным сегнетоэлектриком в точках на оси цилиндра, если его вектор поляризации равен  $\mathbf{P}$ . Для точек внутри цилиндра найдите также значение вектора электрического смещения.

**Решение.** Электрическое поле сегнетоэлектрика мы найдем, если будет известно распределение объемных ( $\rho'$ ) и поверхностных ( $\sigma'$ ) связанных электрических зарядов, которые определяются соотношениями

$$\rho' = -\text{div } \mathbf{P} \quad \text{и} \quad \sigma' = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}).$$

Для рассматриваемого сегнетоэлектрика в силу его однородной поляризации ( $\mathbf{P} = \text{const}$ )  $\rho' = 0$ , в то время как на торцах цилиндра  $\sigma' = P_n$  (внешняя среда считается вакуумом и поэтому  $P_2 = 0$ ).

Таким образом, мы пришли к задаче о поле двух заряженных дисков (см. задачу 5.22). Здесь мы приводим только результаты решения задачи 5.22, заменяя в них  $\sigma$  на  $P$ . При  $|z| > l/2$

$$(\varphi')_e = (1/4\pi\epsilon_0) \pi P \{ [(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} - [(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} \} - (1/4\pi\epsilon_0) 2\pi P,$$

$$(E')_e = (1/4\pi\epsilon_0) 2\pi P \{ (l+2z) [(l+2z)^2 + (2R)^2]^{-1/2} + (l-2z) [(l-2z)^2 + (2R)^2]^{-1/2} \};$$

при  $|z| < l/2$

$$(\varphi')_i = -(1/4\pi\epsilon_0) 4\pi P |z| + (1/4\pi\epsilon_0) \pi P \{ [(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} - [(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2} \},$$

$$(E')_i = -(1/4\pi\epsilon_0) 4\pi P + (1/4\pi\epsilon_0) 2\pi P \{ (l+2z) [(l+2z)^2 + (2R)^2]^{-1/2} + (l-2z) [(l-2z)^2 + (2R)^2]^{-1/2} \}.$$

По определению  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . Поэтому для  $|z| < l/2$

$$(D')_i = (1/4\pi) 2\pi P \{ (l+2z) [(l+2z)^2 + (2R)^2]^{-1/2} + (l-2z) [(l-2z)^2 + (2R)^2]^{-1/2} \},$$

и для  $|z| > l/2$  (так как в этом случае  $\mathbf{P} = 0$ )

$$(D')_e = \epsilon_0 (E')_e,$$

т.е. вне сегнетоэлектрика вектор электрического смещения и вектор напряженности совпадают с точностью до постоянного множителя.

## II-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Тонкую пластинку из эбонита ( $\epsilon' = 3$ ) поместили в однородное электростатическое поле напряженностью  $E_0 = 10^3$  В/м так, что плоскость пластинки образуют с направлением поля угол в  $60^\circ$ . Найдите величину и направление векторов  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  в пластине.

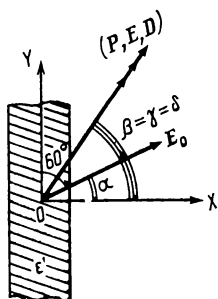


Рис. 27

**Решение.** Векторы  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  имеют внутри пластинки одинаковое направление, образующее с плоскостью пластинки угол  $30^\circ$  (см. рис. 27). Учитывая, что  $P_i = \kappa(1 + \kappa N_i)^{-1} \epsilon_0 E_{0i}$ ,  $E_i = (1 + \kappa N_i)^{-1} E_{0i}$ ,  $D_i = (\kappa + 1) \times (1 + \kappa N_i)^{-1} \epsilon_0 E_{0i}$ , где  $N_i$  — факторы формы пластинки, и то, что  $N_y = N_z = 0$ ,  $N_x = 1$ , а  $E_{0x} = E_0 \cos \alpha$ ,  $E_{0y} = E_0 \sin \alpha$ , найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= P_y/P_x = \epsilon' \operatorname{tg} \alpha, \\ P &= (\epsilon' - 1) (\epsilon')^{-1} [\cos^2 \alpha + (\epsilon')^2 \sin^2 \alpha]^{1/2} \epsilon_0 E_0; \\ \operatorname{tg} \gamma &= E_y/E_x = \epsilon' \operatorname{tg} \alpha, \\ E &= (\epsilon')^{-1} [\cos^2 \alpha + (\epsilon')^2 \sin^2 \alpha]^{1/2} E_0; \\ \operatorname{tg} \delta &= D_y/D_x = \epsilon' \operatorname{tg} \alpha, \\ D &= [\cos^2 \alpha + (\epsilon')^2 \sin^2 \alpha]^{1/2} \epsilon_0 E_0, \end{aligned}$$

$$\text{где } \epsilon' = \kappa + 1 \text{ и } \alpha = \pi/6.$$

Таким образом,  $\beta = \gamma = \delta = \pi/3$ ,

$$P = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 7^{1/2} \epsilon_0 E_0, \quad E = 3^{-1} \cdot 7^{1/2} E_0, \quad D = 7^{1/2} \epsilon_0 E_0.$$

**3.2.2.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком с проницаемостью  $(\epsilon')_1$ , в котором в качестве примеси имеется малая сферическая частица диэлектрика с проницаемостью  $(\epsilon')_2$ . Определите напряженность поля внутри этой частицы, если до заполнения диэлектриком напряженность поля между пластинами конденсатора была  $E_0$ .

Решение. Вычислим сначала поле внутри полости (сферической) диэлектрика (рис. 28):

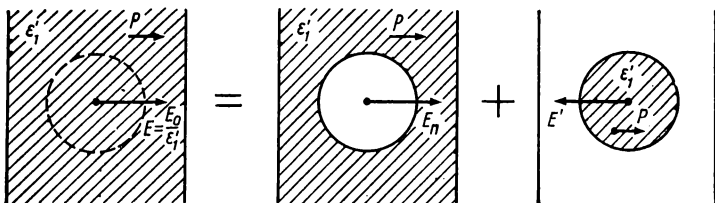


Рис. 28

$E = E_{\pi} - E' = E_{\pi} - (3\epsilon_0)^{-1}P_1$ , где  $P_1 = \kappa_1\epsilon_0 E$ .  
Поле внутри сферической частицы с проницаемостью  $(\epsilon')_2$  равно (рис. 29)

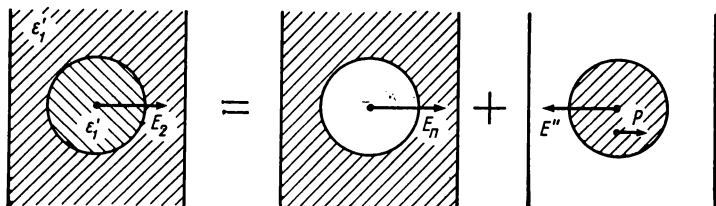


Рис. 29

$E_2 = E_{\pi} - E'' = E_{\pi} - (3\epsilon_0)^{-1}P_2$ , где  $P_2 = \kappa_2\epsilon_0 E_2$ ,  
 $E'$  и  $E''$  — деполяризующие поля в сферах с  $P_1$   $P_2$ .

Таким образом,  $E_{\pi} = (1 + \kappa/3)E = (2 + (\epsilon')_1) \times$   
 $\times (3(\epsilon')_1)^{-1}E_0$  и  $E_2 = (2 + (\epsilon')_1)(2 + (\epsilon')_2)^{-1}E_0(\epsilon_i)^{-1}$ .

а) При  $(\epsilon')_2 = 1$   $E_2 = (2 + \epsilon_1)(3\epsilon_1)^{-1}E_0$ .

б) При  $(\epsilon')_2 = (\epsilon')_1$   $E_2 = E_0/(\epsilon')_1$ .

в) При  $(\epsilon')_2 \rightarrow \infty$   $E_2 = 0$ .

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Очень тонкий цилиндрический стержень объемом  $V$  из однородного диэлектрика (изотропного) восприимчивостью  $\kappa$  находится в однородном поле  $E_0$ , образующем угол  $\alpha$  с направлением оси стержня. Определить величину внешнего механического момента, который удерживает стержень в равновесии.

Решение. В системе отсчета, выбранной так, что вектор  $\mathbf{E}_0$  лежит в плоскости  $XY$ , а ось  $X$  параллельна оси стержня, имеем

$\mathbf{L} = V[\mathbf{P} \times \mathbf{E}_0]$  или  $L = L_z = V(P_x E_{0y} - P_y E_{0x})$ ,  
а также

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \text{ а } E_x = E_{0x} - N_x P_x (\epsilon_0)^{-1}; \\ E_y = E_{0y} - N_y P_y (\epsilon_0)^{-1}; N_x = 0, N_y = N_z = 2^{-1}.$$

Поэтому

$$L = L_z = V \epsilon_0 \kappa^2 \cdot 2^{-1} (2 + \kappa)^{-1} (E_0)^2 \sin 2\alpha.$$

*Примечание.* Если  $\kappa \gg 1$ , то  $L = 2^{-1} V \epsilon_0 \kappa (E_0)^2 \sin 2\alpha$ ,  
если  $\kappa \ll 1$ , то  $L = 4^{-1} V \epsilon_0 \kappa^2 (E_0)^2 \sin 2\alpha$ .

## 4. Контрольные вопросы

4.1. Запишите размерность в единицах системы СИ и CGSE вектора поляризации, вектора индукции и потока вектора индукции электростатического поля.

4.2. Как определить направление вектора поляризации диэлектрического эллипсоида, если известны величина и направление вектора напряженности внешнего электростатического поля, в котором он находится?

4.3. Для описания электростатического поля внутри диэлектрика часто используют вектор индукции электростатического поля. Для какой цели он вводится? Может ли величина  $\text{rot } \mathbf{D}$  быть отличной от нуля? Если может, то в каких случаях? Что можно сказать о линиях вектора индукции электростатического поля, созданного только поляризованным диэлектриком?

4.4. Чему равны факторы формы диэлектрического эллипсоида в системе отсчета, связанной с его главными осями? Чему равны факторы формы безграничной плоской пластины, безграничного кругового цилиндра и сферы? Как зависят факторы формы сплюснутого и вытянутого эллипсоидов вращения от их эксцентриситета?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Определите силу, действующую на точечный заряд  $q$  со стороны поверхностных зарядов, индуци-

рованных зарядом  $q$  на границе раздела двух диэлектриков с проницаемостью  $\epsilon_1'$  и  $\epsilon_2'$ . Расстояние от заряда  $q$  до границы раздела равно  $z_0$ .

Ответ.  $F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2z_0)^2} \frac{\epsilon_1' - \epsilon_2'}{\epsilon_1'(\epsilon_1' + \epsilon_2')}$ .

5.2. Определите силу, действующую на единицу длины, заряженной с линейной плотностью  $\gamma$  нити, со стороны поверхностных зарядов, индуцированных на границе раздела двух диэлектриков с проницаемостью  $\epsilon_1'$  и  $\epsilon_2'$ . Нить параллельна границе раздела и отстоит от нее на расстоянии  $z_0$ .

Ответ.  $F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\gamma^2}{(2z_0)^2} \frac{\epsilon_1' - \epsilon_2'}{\epsilon_1'(\epsilon_1' + \epsilon_2')}$ .

5.3. Каким был бы диаметр идеального проводящего шара с такой же поляризуемостью, как у атома водорода? (Атомная поляризуемость водорода  $\alpha = 0,66 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$ .)

Ответ.  $d \approx 0,75 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ .

5.4. На сколько процентов отличаются индуцированные дипольные моменты капельки (шарика) воды ( $\epsilon' = 81$ ) и шарикоподшипника того же диаметра в том же поле?

Ответ.  $\eta \approx 3,65\%$ .

5.5. Если все молекулярные диполи в капле воды, имеющей форму сферы радиуса 1 мм, направлены в одну сторону, то какова будет максимальная напряженность поля в 10 см от капли? Дипольный момент молекулы воды  $p = 0,62 \cdot 10^{-29} \text{ Кл} \cdot \text{м}$ .

Ответ.  $E_M \approx 4,7 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ .

5.6. Два одинаковых точечных заряда  $q_1 = q_2 = q$  находятся на расстоянии  $a$  друг от друга в твердом диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon'$ . Заряды расположены в центрах малых сферических полостей. Найдите силу взаимодействия зарядов.

Ответ.  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \frac{2 + \epsilon'}{3\epsilon'}$ .



5.7. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon_1'$ , в котором в качестве примеси имеется малая сферическая частица диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon_2'$ . Определите напряженность поля внутри этой частицы, если до заполнения диэлектриком напряженность поля между пластинами конденсатора была  $E_0$ .

Ответ.  $E = \left( \frac{2 + \epsilon_1'}{2 + \epsilon_2'} \right) \frac{E_0}{\epsilon_1'}$ .

5.8. Однородный диэлектрик с относительной проницаемостью  $\epsilon'$  имеет форму шара. Определите восприимчивость диэлектрического тела (шара).

Ответ.  $\kappa_T = 3(\epsilon' - 1)/\epsilon' + 2$ .

5.9. Считая, что напряженность однородного электростатического поля внутри однородного изотропного диэлектрика с восприимчивостью  $\kappa$  равна  $E$ , определите напряженность поля внутри полости диэлектрика, имеющей форму произвольного эллипсоида, если известны факторы формы (коэффициенты деполяризации) этого эллипсоида вдоль его полуосей —  $N_a$ ,  $N_b$ ,  $N_c$ . Рассмотрите случаи, когда полость имеет форму узкой длинной щели, параллельной полю  $E$ , когда щель перпендикулярна полю и когда полость имеет форму сферы.

Ответ.  $E_{\text{п}} = (1 + N_a \kappa) E_x \mathbf{i} + (1 + N_b \kappa) E_y \mathbf{j} + (1 + N_c \kappa) E_z \mathbf{k}$

Для щели, параллельной полю  $E_{\text{п}} = E$ ;

для щели, перпендикулярной полю  $E_{\text{п}} = \epsilon' E$ ;

когда полость — сфера  $E_{\text{п}} = 3^{-1}(2 + \epsilon') E$ .

5.10. Однородный изотропный диэлектрик с восприимчивостью  $\kappa$ , имеющий форму вытянутого эллипсоида вращения ( $a > b = c$ ), где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — полуоси эллипсоида, находится в однородном поле  $E_0$ , образующем угол  $\alpha$  с большой полуосью эллипсоида. Считая известным фактор формы эллипсоида в направлении оси  $a$  ( $N_a$ ), определите направление вектора поляризации эллипсоида.

Ответ.  $\theta = [\arctg \left[ \frac{2(1 + \kappa N_a)}{2 + \kappa(1 - N_a)} + \tg \alpha \right]]$ ,

где  $\theta$  — угол между большой полуосью эллипсоида (а) и направлением вектора  $E_0$ .

**5.11.** Однородный изотропный диэлектрик с восприимчивостью  $\epsilon' = 3$ , имеющий форму вытянутого эллипсоида вращения с полуосями  $a = 5$  см,  $b = c = 3$  см, находится во внешнем однородном поле  $E_0$ , образующем угол  $\alpha = 15^\circ$  с направлением большой полуоси эллипсоида. Определите величину внешнего механического момента, который удерживает эллипсоид в равновесии.  $E_0 = 10^3$  В/м.

Отв.  $L = 8 \cdot 10^{-12}$  Н·м.

## Раздел V

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТАЦИОНАРНОГО ТОКА В ПУСТОТЕ

#### 1. Теоретический материал

Взаимодействие элементов линейного тока. Закон Ампера. Системы единиц СИ и CGSM. Значение и смысл магнитной постоянной  $\mu_0$ . Полевая трактовка закона взаимодействия токов. Закон Био — Савваара. Индукция магнитного поля. Принцип суперпозиции. Индукция поля для системы линейных токов. Непрерывное распределение тока. Объемная, поверхностная и линейная плотность токов. Индукция магнитного поля, созданного непрерывным распределением тока. Линии и поток вектора индукции магнитного поля. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля. Векторный потенциал. Связь между индукцией и векторным потенциалом. Дифференциальные уравнения магнитного поля стационарного тока в пустоте. Условия на границе распределения тока. Магнитное поле однопроводного, двумерного распределения тока. Однокомпонентный векторный потенциал. Математическая эквивалентность плоских

магнитостатических и электростатических задач. Магнитный момент электрического тока. Магнитный момент линейного контура с током. Магнитный диполь. Потенциал и поле магнитного диполя. Действие магнитного поля на ток и магнитный диполь. Взаимодействие магнитных диполей. Определение индукции магнитного поля на основе представлений о пробном магнитном диполе.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Взаимодействие каких токов описывает закон Ампера? Что мы называем элементом тока? Какими единицами измеряется ток в системах СИ, CGSE и CGSM?

2.2. Как рассчитать индукцию магнитного поля заданного распределения тока? Что Вы можете сказать о линиях индукции магнитного поля? Чему равен поток вектора индукции магнитного поля через любую замкнутую поверхность? Какими единицами измеряется индукция и поток вектора индукции в системах СИ и CGSM?

2.3. Для каких систем токов удобно применять теорему о циркуляции вектора индукции при определении индукции поля, созданного этими токами? Каков смысл понятия  $\text{rot } \mathbf{B}$  и чему он равен?

2.4. Как теоретически вычислить векторный потенциал заданного распределения тока? Какими единицами измеряется векторный потенциал в системах СИ и CGSM? Каков смысл понятия  $\text{div } \mathbf{B}$  и чему равна эта величина?

2.5. Каким условиям должны удовлетворять дифференциальные уравнения магнитного поля на границах распределения токов?

2.6. Каким должно быть распределение токов, чтобы векторный потенциал магнитного поля этих токов имел одно и то же направление во всех точках поля? В чем смысл эквивалентности плоских задач магнетостатики и электростатики?

2.7. Какую величину называют магнитным моментом замкнутого тока? Какими единицами измеряется магнитный момент в системах СИ и CGSM?

2.8. Как, опираясь на представление о «пробном

магнитном диполе», дать определение индукции магнитного поля? Чему равны потенциал и индукция магнитного поля, созданного магнитным диполем?

### 3. Основные типы задач и их решения

#### а) Классификация

3.1. Определение индукции магнитного поля линейного тока заданной конфигурации.

Метод решения. Прямое интегрирование выражений для индукции магнитного поля линейного потока

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}.$$

3.2. Определение векторного потенциала и индукции магнитного поля однонаправленного распределения тока (плоские задачи магнетостатики).

Метод решения. 1) Прямое интегрирование выражений для векторного потенциала и индукции магнитного поля заданного однонаправленного распределения тока

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3} \text{ и } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}}{r},$$

где  $d\mathbf{l} = j dV$  и (или)  $k ds$ , а  $j$  и  $k$  — объемная и поверхностная плотности токов соответственно.

2) Применение теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля для симметричного распределения тока и соотношения, связывающего между собой индукцию и векторный потенциал:

$$\oint (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}) = \mu_0 \int (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) \text{ и } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

3) Использование математической эквивалентности в решении плоских магнитостатических и электростатических задач: для одинаковых функций распределения тока и заряда — одинаковые решения для векторного потенциала и индукции магнитного поля, а также для скалярного потенциала и напряженности электростатического поля. Необходимо помнить,

что направления векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в эквивалентных задачах взаимно перпендикулярны вследствие того, что

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \text{ а } \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

**3.3. Определение сил, действующих на ток и магнитный диполь во внешнем магнитном поле.**

Метод решения. Использование выражений, определяющих силу, действующую на ток и магнитный диполь в магнитном поле:

$$\mathbf{F} = \int [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_0], \quad \mathbf{F}_m = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0,$$

где  $\mathbf{m}$  — магнитный момент диполя.

## б) Примеры

### I-й тип задач (3.1)

**3.1.1.** Отрезок прямолинейного проводника с током (рис. 30) занимает часть оси  $Z$  от  $z = -l_1$ , до  $z = l_2$ . Вычислите индукцию магнитного поля в точке  $M$ , лежащей в плоскости  $z=0$ .

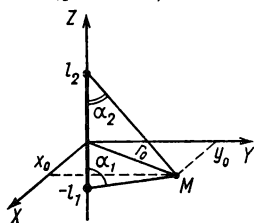


Рис. 30

Решение. По определению

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int l \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3},$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный от элемента  $d\mathbf{l}$  до точки  $M$ . Напоминая, что

$$[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}] = (dl_y r_z - dl_z r_y) \mathbf{i} + (dl_z r_x - dl_x r_z) \mathbf{j} + (dl_x r_y - dl_y r_x) \mathbf{k},$$

и так как

$$dl_x = dl_y = 0, \quad dl_z = +dz, \quad r_x = x_0, \quad r_y = y_0, \quad r_z = -z, \\ r = (x_0^2 + y_0^2 + z^2)^{1/2} = (r_0^2 + z^2)^{1/2},$$

для  $x$ -компоненты индукции получим

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} l \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dz}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = \\ = \frac{\mu_0}{4\pi} l \frac{y_0}{r_0^2} \left[ \frac{l_2}{(r_0^2 + l_2^2)^{1/2}} + \frac{l_1}{(r_0^2 + l_1^2)^{1/2}} \right].$$

Аналогично

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x_0}{r_0^2} \left[ \frac{l_2}{(r_0^2 + l_2^2)^{1/2}} + \frac{l_1}{(r_0^2 + l_1^2)^{1/2}} \right].$$

Тогда

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1),$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{l_2}{(r_0^2 + l_2^2)^{1/2}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{l_1}{(r_0^2 + l_1^2)^{1/2}}.$$

а) если  $l_1 = l_2$ , то  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \cos \alpha$  и

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_0} \cos \alpha;$$

б) если  $l_1 = l_2 = l \rightarrow \infty$ , то  $|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_0}$ ;

в) если  $l_1 = l_2 \gg r_0$ , то  $|\mathbf{B}| = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{l_2^2} \right)$ ,

или так как  $L = 2l$ , то

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_0} \left( 1 - 2 \frac{r_0^2}{L^2} \right),$$

где  $L$  — полная длина проводника.

*II-й тип задач (3.2)*

**3.2.1.** По прямолинейной, бесконечно длинной и тонкой полоске шириной  $a$  течет постоянный ток  $I$ , равномерно распределенный по ее ширине. Вычислите индукцию магнитного поля и векторный потенциал в точках, лежащих на перпендикуляре к плоскости, проведенном через ее середину.

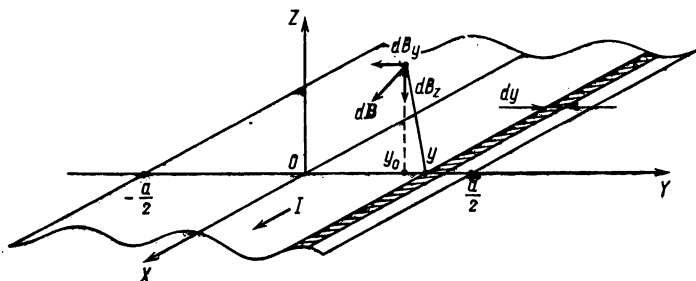


Рис. 31

Решение. Расположим систему отсчета так, как показано на рис. 31. Тогда (см. примечания к задаче 3.1.1) компоненты индукции магнитного поля в точке с координатами  $(0, 0, z_0)$ , созданного узкой полоской, параллельной оси  $X$ , шириной  $dy$  и с координатой  $y$ , будут равны

$$dB_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2z_0 \frac{I}{a} \frac{dy}{y^2 + z_0^2}, \quad dB_x = dB_z = 0.$$

После интегрирования по  $y$  от  $-a/2$  до  $a/2$  получим

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} 4 \frac{I}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{2z_0}.$$

Векторный потенциал  $A$  найдем из условия  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ .

Тогда

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} 4 \frac{I}{a} \left[ z_0 \operatorname{arctg} \frac{a}{2z_0} + \frac{a}{4} \ln \left( \frac{4z_0^2 + a^2}{a^2} \right) \right].$$

*Примечания.*

1) Наиболее интересными частными случаями являются случаи:

а) когда  $z_0 \gg a$ , то  $B_y = -\mu_0 (4\pi)^{-1} 2I (z_0)^{-1}$ ,

б) когда  $z_0 \ll a$ , то  $B_y = -\mu_0 (4\pi)^{-1} 2\pi I a^{-1}$ .

2) Можно определить  $B_y$  и  $B_z$  в произвольной точке с координатами  $(0, y_0, z_0)$ :

$$B_y = -\mu_0 (4\pi)^{-1} 2I a^{-1} \left[ \operatorname{arctg} (a + 2y_0/2z_0) + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} (a - 2y_0/2z_0) \right],$$

$$B_z = -\mu_0 (4\pi)^{-1} I a^{-1} \ln \{ [(y_0 - a/2)^2 + (z_0)^2] [(y_0 + a/2)^2 + (z_0)^2]^{-1} \}.$$

3) При интегрировании были использованы табличные интегралы типа

$$\int (y^2 + b^2)^{-1} dy = b^{-1} \operatorname{arctg} (y/b); \\ \int y (y^2 + b^2)^{-1} dy = 2^{-1} \ln (y^2 + b^2).$$

### III-й тип задач (3.3)

3.3.1. По тонкому проводнику, согнутому в виде окружности радиуса  $R$ , течет ток  $I$ . Механическая прочность проволоки  $f_0$ . При каком значении индукции магнитного поля, перпендикулярного поверхности круга, произойдет разрыв проволоки.

**Решение.** На элемент проволоки  $dl$  с током  $I$  действует сила, равная

$$dF = IBdl.$$

Проекция этой силы на выбранное направление (например, ось  $X$ ), проходящее через центр окружности, равна

$$dF_x = IBR \cos \alpha d\alpha.$$

Следовательно, сила, действующая на половину окружности,

$$F_x = IBR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = 2IBR.$$

В момент разрыва  $F_x = 2f_0$ . Поэтому  $B = f_0/IR$ .

**3.3.2.** На деревянный круглый цилиндр объемом  $V$  в один слой намотана катушка, образующая короткий соленоид. По катушке течет ток, поверхностная плотность которого равна  $K$  А/м<sup>2</sup>. Определите механический момент, который удерживает цилиндр в равновесии, если он находится во внешнем однородном поле с индукцией  $B_0$ , образующем угол  $\alpha$  с осью цилиндра.

**Решение.** На катушку длиной  $dl$  действует со стороны внешнего поля вращающий момент, равный

$$dL_B = \pi R^2 K dl \cdot B_0 \sin \alpha.$$

Полный момент будет равен  $L_B = VKB_0 \sin \alpha$ . В условиях равновесия внешний момент  $L = L_B$ .

## 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Укажите размерности в единицах системы СИ и CGSM величин линейной, поверхностной и объемной плотностей тока.

**4.2.** При определении индукции магнитного поля пользуются представлениями о «пробном» магнитном диполе. Что понимают под этим термином?

**4.3.** Напишите дифференциальные уравнения для скалярного и векторного потенциалов электростатического и магнитостатического полей соответственно, на основе которых построены аналогии при решении плоских магнитостатических и электростатических задач. Каким граничным условиям удовлетворяют по-



тенциал и напряженность электростатического поля, а также векторный потенциал и индукция магнитного поля?

4.4. Можно ли магнитное поле электрического тока описать не векторным, а скалярным потенциалом? Если нельзя, то почему? Если можно, то как это сделать?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. По тонкому проводнику, согнутому в виде кольца радиуса  $R$ , течет ток  $I$ . Вычислите индукцию магнитного поля в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии  $z_0$  от его центра.

Ответ.  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}$ .

5.2. По тонкому проводнику, согнутому в виде квадратной рамки со стороной  $a$ , течет ток  $I$ . Вычислите индукцию магнитного поля в точке, лежащей на оси рамки на расстоянии  $z_0$  от ее центра.

Ответ.  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{16I}{a} \frac{(a/2)^3}{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + z_0^2\right] \left[2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + z_0^2\right]^{1/2}}$ .

5.3. Для создания достаточно однородного магнитного поля используют пару круглых катушек (кольца Гельмгольца) одинакового радиуса и с одинаковыми полными токами (полный ток  $I = Ni$ , где  $N$  — полное число витков в катушке, а  $i$  — ток одного витка). Катушки располагают на расстоянии друг от друга так, чтобы их оси совпадали. Заменяя катушки эквивалентными кольцами радиуса  $R$  с током  $I$ , вычислите индукцию магнитного поля в точке, лежащей на их общей оси на расстоянии  $z_0$  от точки  $O$ . При каком соотношении между  $l$  и  $R$  магнитное поле в окрестности точки  $O$  будет предельно однородным?

Ответ.

1)  $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \left\{ \frac{1}{[R^2 + (l/2 + z_0)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (l/2 - z_0)^2]^{3/2}} \right\}$ ,

2)  $l = R$  (см. рис. 32),

5.4. Для создания однородного магнитного поля иногда вместо круглых катушек Гельмгольца (см. задачу 5.3) используют квадратные катушки. Предполагая, что магнитное поле создается двумя квадратными рамками с одинаковыми и параллельными токами  $I$ , вычислите индукцию магнитного поля в точках, лежащих на их общей оси.

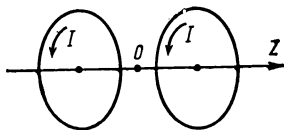


Рис. 32

Сторона квадратной рамки равна  $a$ , а расстояние между ними —  $l$ . При каком соотношении между  $l$  и  $a$  магнитное поле между рамками предельно однородно?

Ответ.

$$B = -\frac{\mu_0 2a^2 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{l}{2} + z \right)^2 \right] \left[ 2 \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( \frac{l}{2} + z \right)^2 \right]^{1/2}} + \frac{1}{\left[ \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{l}{2} - z \right)^2 \right] \left[ 2 \left( \frac{a}{2} \right)^2 \left( \frac{l}{2} - z \right)^2 \right]^{1/2}} \right\},$$

$$l \approx 0,58 a.$$

5.5. Вычислите индукцию магнитного поля на оси короткого однослойного соленоида с током  $I$ , на единицу длины которого приходится  $n$  витков. Радиус соленоида  $R$ , его длина  $l$ . Рассмотрите наиболее интересные частные случаи.

Ответ.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I \left\{ \frac{l+2z}{[l(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} + \frac{l-2z}{[(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} \right\}$$

5.6. По бесконечному цилиндрическому проводнику, имеющему форму полого тонкостенного цилиндра с радиусом сечения  $R$ , течет постоянный ток с равномерной поверхностной плотностью  $k$ , параллельной оси цилиндра. Вычислите индукцию магнитного поля и векторный потенциал в точке, отстоящей на расстоянии  $r$  от оси цилиндра.

Ответ. Для  $r < R$   $B = 0$ ,  $A = 0$ ;

$$\text{для } r > R \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi k R \cdot \frac{1}{r}, \quad A = -\frac{\mu_0}{4\pi} 4\pi k R \ln \frac{r}{R}.$$

5.7. По бесконечному цилиндрическому проводнику кругового сечения радиуса  $R$  течет постоянный ток с равномерной объемной плотностью  $\mathbf{j}$ . Вычислите индукцию магнитного поля и векторный потенциал в точке, отстоящей на расстоянии  $r$  от оси цилиндра. Относительную магнитную проницаемость вещества проводника считать равной единице.

Ответ.

$$\text{Для } r < R \quad B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi j r, \quad A_i = -\frac{\mu_0}{4\pi} \pi j r^2,$$

$$\text{для } r > R \quad B_e = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 j \frac{1}{r},$$

$$A_e = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 j \left( \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right).$$

5.8. По бесконечному цилиндрическому проводнику, имеющему форму полого цилиндра с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним  $R_2$ , течет постоянный ток с равномерной объемной плотностью  $\mathbf{j}$ . Вычислите индукцию магнитного поля и векторный потенциал в точке, отстоящей на расстоянии  $r$  от оси цилиндра. Относительную магнитную проницаемость вещества считать равной единице.

Ответ. Для  $r < R_1$   $B = 0$ ,  $A = 0$ ;

$$\text{для } R_1 < r < R_2 \quad B_i = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi j \left( r - \frac{R_2^2}{r} \right),$$

$$A_i = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi j \left[ \frac{1}{2} (r^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{r}{R_1} \right];$$

$$\text{для } r > R_2 \quad B_e = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi j (R_2^2 - R_1^2) \cdot \frac{1}{r},$$

$$A_e = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi j \left[ (R_2^2 - R_1^2) \ln r + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) - (R_2^2 \ln R_1 - R_1^2 \ln R_2) \right].$$

5.9. По плоскости  $Z=0$  в направлении оси  $X$  течет ток, поверхностная плотность которого одинакова во всех точках плоскости и равна  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{i}$ . Вычислите

индукцию и векторный потенциал магнитного поля заданного распределения тока.

Ответ.

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi K_0 \frac{z}{|z|}, \quad B_x = B_z = 0,$$

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi K_0 |z|.$$

5.10. По плоскости  $Z=0$  в направлении оси  $X$  течет ток, поверхностная плотность которого зависит от  $y$  по закону  $k=k_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right) \cdot i$ , где  $k_0$  и  $\lambda$  — постоянные величины. Вычислите индукцию и векторный потенциал магнитного поля заданного распределения тока.

Ответ.

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi K_0 \left[ \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} |z|\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right) \frac{z}{|z|},$$

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi K_0 \left[ \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} |z|\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right),$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} K_0 \lambda \left[ \exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} |z|\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right).$$

5.11. Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен по поверхности с плотностью заряда  $\sigma$ . Этот заряд равномерно вращается вокруг оси, проходящей через центр шара, с угловой скоростью  $\omega$ . Вычислите магнитный момент шара и индукцию магнитного поля в центре шара.

Ответ.  $m = (4/3) \pi R^4 \sigma \omega$ ,  $B = (\mu_0/4\pi) (4/3) 2\pi R \tilde{\omega}$ .

5.12. В какой точке на оси кольца с током радиуса  $R$  магнитное поле кольца отличается от магнитного поля эквивалентного магнитного диполя на 1%?

Ответ.  $z \approx 12R$ .

## Раздел VI

### МАГНЕТОСТАТИКА МАГНЕТИКОВ

#### 1. Теоретический материал

Магнетики в магнитном поле. Три способа описания макроскопических свойств магнетиков. Дипольное описание макроскопических свойств магнетиков. Вектор намагниченности. Индукция магнитного поля, созданного намагниченным магнетиком. Затруднения при описании магнитного поля внутри магнетика. Локальное поле. Представления о внутримолекулярных токах Ампера. Связь между плотностью токов Ампера и намагниченностью магнетика. Индукция и векторный потенциал магнитного поля внутри намагниченного магнетика.

Представления о фиктивных «магнитных зарядах». Связь между плотностью фиктивных «магнитных зарядов» и намагниченностью магнетика. Скалярный потенциал и напряженность магнитного поля внутри намагниченного магнетика. Связь между векторами индукции и напряженности магнитного поля. Дифференциальные уравнения магнитоэстатического поля в присутствии магнетиков. Граничные условия для векторов индукции и напряженности магнитного поля. Магнитный эллипсоид во внешнем однородном поле. Напряженность и индукция магнитного поля внутри эллипсоида. Размагничивающее поле. Поле внутри малой области магнетика. Локальное поле Лорентца. Связь между вектором намагниченности и напряженности магнитного поля. Восприимчивость и проницаемость магнетиков. Однородный изотропный магнетик. Связь между вектором намагниченности магнитного эллипсоида и индукцией внешнего однородного поля. Восприимчивость тела. Шар, бесконечно тонкий плоский слой и бесконечно длинный цилиндр из однородного изотропного магнетика во внешнем однородном поле. Векторы индукции и напряженности магнитного поля внутри этих магнетиков. Энергия магнитного поля в присутствии однородного магнетика и ее объемная плотность. Пондермоторные

силы, действующие на магнетик. Действие квазиоднородного поля на магнитный шар. Действие однородного поля на эллипсоид из магнетика.

Микроскопические свойства магнетиков. Магнитные свойства атома. Собственный и орбитальный магнитные моменты электрона и их связь с орбитальным моментом количества движения и спином. Монополюс Дирака. Гиромагнитное отношение. Опыт Барнета и Эйнштейна — де Гааза. Уравнение движения гиромагнитного момента во внешнем поле. Теория диамагнетизма как прецессия электронных орбит. Восприимчивость диамагнетиков. Парамагнетики. Теория намагничивания парамагнетиков. Восприимчивость парамагнетиков. Закон Кюри. Ферромагнетики. Спонтанная намагниченность ферромагнетиков. Температура Кюри. Доменная структура ферромагнетиков и причины ее возникновения. Процессы намагничивания и перемагничивания ферромагнетиков. Гистерезис. Магнитомягкие ферромагнетики. Линейная аппроксимация. Магнитные цепи. Магнитостатическая защита. Анизотропия ферромагнетиков и ее влияние на их макроскопические свойства. Постоянные магниты. Магнитное поле постоянных магнитов. Антиферромагнетики и ферримагнетики. Температура компенсаций. Применение ферромагнетиков в технике.

## **2. Вопросы по теоретическому материалу**

**2.1.** Что следует понимать под термином «намагниченный магнетик»? Что мы называем вектором намагниченности? Каков его физический смысл? Какими единицами измеряется вектор намагниченности в системе СИ и CGSM?

**2.2.** Какими представлениями пользуются при описании макроскопического поля внутри магнетика? Какая связь существует между вектором намагниченности и плотностью «токов Ампера», а также плотностью «фиктивных магнитных зарядов»?

**2.3.** Как определить индукцию и напряженность магнитного поля, созданного только намагниченным магнетиком? Какая существует связь между векторами индукции, напряженности и намагниченности?

2.4. Какой вид имеют граничные условия для векторов индукции и напряженности магнитного поля на границе раздела магнетик — вакуум, если известна функция распределения намагниченности магнетика  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , а токи проводимости на поверхности распределения отсутствуют?

2.5. Какой магнетик мы называем однородным и изотропным? Что можно сказать о функции распределения вектора намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  для однородного и изотропного магнетика?

2.6. Чему равна индукция и напряженность магнитного поля внутри однородного и изотропного магнетика, имеющего форму произвольного эллипсоида?

2.7. Какая существует связь между вектором намагниченности магнетика и вектором напряженности магнитного поля для однородного и изотропного магнетика? Что называется восприимчивостью магнетика и каков физический смысл этого понятия? Как различаются восприимчивости магнетика в системах единиц СИ и CGSM? Какая связь между восприимчивостью и проницаемостью в этих системах единиц? Что понимают под восприимчивостью магнитного тела?

2.8. Каким условием удовлетворяют векторы индукции и напряженности магнитного поля на границе раздела двух однородных и изотропных магнетиков?

2.9. Чему равна энергия магнетика во внешнем магнитном поле? Напишите выражение для энергии взаимодействия магнитного эллипсоида с внешним однородным полем.

2.10. Чему равна собственная энергия магнетика (энергия магнетика в собственном магнитном поле)? Напишите выражение для собственной энергии однородно намагниченного эллипсоида.

2.11. Как определить силу и вращающий механический момент, действующие на магнетик во внешнем магнитном поле?

2.12. Какова микроскопическая природа диамагнетизма? Что Вы можете сказать о восприимчивости диамагнетиков?

2.13. Какова микроскопическая природа парамагнетизма? Что Вы можете сказать о восприимчивости парамагнетиков?

2.14. Какой класс магнитных материалов мы называем ферромагнетиками? Что такое спонтанная намагниченность и как она зависит от температуры?

2.15. Что понимают под термином ферромагнитный домен? Как намагниченность и восприимчивость ферромагнетика зависят от напряженности магнитного поля? Какие процессы происходят в ферромагнетике при его намагничивании и перемагничивании? Чем обусловлен магнитный гистерезис?

2.16. Какими свойствами должен обладать ферромагнетик, используемый для магнетостатической защиты? Какими свойствами должен обладать ферромагнетик, применяемый в качестве постоянных магнитов?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Классификация

3.1. Определение индукции и напряженности магнитного поля, созданного намагниченным магнетиком, для заданного распределения в нем вектора намагниченности  $\mathbf{M}(r)$ .

Метод решения. Использование формул, определяющих индукцию или напряженность магнитного поля заданного распределения «токов Ампера» или «фиктивных магнитных зарядов», связанных с заданной функцией распределения вектора намагниченности соотношениями

$$\mathbf{j}_a = \text{rot} \mathbf{M}, \quad \rho_m = -\text{div} \mathbf{M} \text{ в объеме;}$$

$$\mathbf{K}_a = \text{Rot} \mathbf{M}, \quad \sigma_m = -\text{Div} \mathbf{M} \text{ на поверхности;}$$

$$\mathbf{B}_m = (4\pi)^{-1} \mu_0 \int [\mathbf{dI}_a \times \mathbf{r}] r^{-3}, \text{ где } d\mathbf{I}_a = \mathbf{j}_a dV \text{ и (или) } K_a dS,$$

$$\mathbf{H}_m = (4\pi)^{-1} \int \mathbf{r} r^{-3} dq_m, \text{ где } dq_m = \rho_m dV \text{ и (или) } \sigma_m dS.$$

3.2. Определение индукции, напряженности магнитного поля и вектора поляризации внутри однородного, изотропного магнетика с заданной восприимчивостью (или проницаемостью), находящегося во внешнем магнитном поле.

Метод решения. Использование соотношений, связывающих между собой векторы индукции, напряженности магнитного поля и векторы намагниченности внутри однородного, изотропного магнетика

$$\mathbf{B} = \mu' \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \mu' = 1 + \chi_m.$$



**3.3. Определение силы, действующей на шарик магнетика со стороны внешнего квазиоднородного магнитного поля, и вращающего механического момента, действующего на магнитный эллипсоид в однородном поле.**

Метод решения. Использование соотношений, определяющих величину силы  $\mathbf{F}$  и момента силы  $\mathbf{L}$ , действующих на магнитный шарик и эллипсоид в квазиоднородном и однородном поле соответственно:

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{m}_{\text{ш}} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \text{ и } \mathbf{L} = [\mathbf{m}_{\text{эл}} \times \mathbf{B}_0],$$

где  $\mathbf{m}_{\text{ш}}$  и  $\mathbf{m}_{\text{эл}}$  — магнитные моменты шарика и эллипсоида.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

**3.1.1. «Жесткий» ферромагнетик (постоянный магнит), имеющий форму цилиндра радиуса  $R$  и высотой  $l$  однородно намагничен ( $\mathbf{M} = \text{const}$ ) в направлении оси цилиндра. Вычислите индукцию магнитного поля, созданного намагниченным ферромагнетиком в точках на оси цилиндра, если его вектор намагниченности равен  $\mathbf{M}$ . Для точек внутри цилиндра найдите также значение вектора напряженности магнитного поля.**

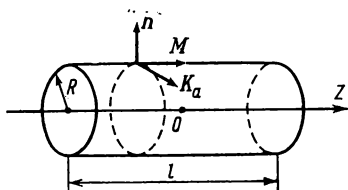


Рис. 33

Решение. Магнитное поле ферромагнетика мы найдем, если нам будет известно распределение объемного  $\mathbf{j}_a$  и поверхностного  $\mathbf{K}_a$  «тока Ампера», которое определяется соотношениями (рис. 33):

$$\mathbf{j}_a = \text{rot} \mathbf{M} \text{ и } \mathbf{K}_a = \text{Rot} \mathbf{M} \equiv [\mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)].$$

где  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_1$  — значения вектора намагниченности по разные стороны поверхности,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Для рассматриваемого ферромагнетика в силу его однородной поляризации ( $\mathbf{M} = \text{const}$ )

$$\mathbf{j}_a = \text{rot} \mathbf{M} = 0,$$

в то время как на боковой поверхности цилиндра

$$\mathbf{K}_a = -[\mathbf{n} \times \mathbf{M}], \quad (|\mathbf{K}_a| = |\mathbf{M}|)$$

(внешняя среда считается вакуумом и поэтому  $\mathbf{M}_2 = 0$ ).

Таким образом, мы пришли к задаче о поле на оси цилиндрического проводника, по поверхности которого течет поверхностный ток  $K_a = I_a/l$  (см. задачу 5.5). Здесь мы приводим только результаты решения задачи 5.5, заменяя в них  $I_a/l$  на  $M/I_a = nlI$  — полный ток.

В произвольной точке на оси цилиндра

$$|\mathbf{B}_m| = B_{mz} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi M \left\{ \frac{l+2z}{[(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} + \frac{l-2z}{[(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} \right\}.$$

По определению

$$\mathbf{H}_m = \mu_0^{-1} \mathbf{B}_m - \mathbf{M}.$$

Поэтому для  $|z| < l/2$ ,

$$H_{mz} = \frac{1}{4\pi} 2\pi M \left\{ \frac{l+2z}{[(l+2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} + \frac{l-2z}{[(l-2z)^2 + (2R)^2]^{1/2}} \right\} - \frac{1}{4\pi} 4\pi M$$

и для  $|z| > l/2$  (так как в этом случае  $M=0$ )

$$B_m = \mu_0 H_m,$$

т. е. вне ферромагнетика вектор напряженности и вектор индукции магнитного поля совпадают с точностью до постоянного множителя  $\mu_0$ , а внутри ферромагнетика они антипараллельны.

## II-й тип задачи (3.2)

3.2.1. В однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}_0$  внесли шарик радиуса  $R$  из магнетика, восприимчивость вещества которого  $\kappa_m$  — постоянная величина. Определите индукцию и напряженность магнитного поля в пространстве, окружающем шарик, и внутри шарика.

Решение. Для шарика (эллипсоида) во внешнем однородном магнитном поле поляризация (намагничивание) однородна. Поэтому в силу изотропности формы шарика, связь между  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{H}_m$  и  $\mathbf{M}$  остается векторной (фактор формы  $N$  — скаляр, для шара  $N=1/3$ ). Поэтому внутри шара

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_m, \quad \mathbf{B}_m = \mu_0(1-N)\mathbf{M}_0, \quad \mathbf{B}_i = \mu_0(\mathbf{H}_i + \mathbf{M}).$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m, \quad \mathbf{H}_m = -N\mathbf{M}, \quad \mathbf{B}_m = \mu_0(\mathbf{H}_m + \mathbf{M}).$$

По определению и условию задачи  $\mathbf{M} = \kappa_m \mathbf{H}$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{B}_i = \frac{1 + \kappa_m}{1 + \kappa_m N} \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{H}_i = \frac{1}{1 + \kappa_m N} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0.$$

Поле вне шара является суперпозицией однородного поля и поля, расположенного в центре шара диполя с магнитным моментом

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{M}.$$

А так как  $\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_m}{1 + \kappa_m N} \mathbf{B}_0$ ,

то  $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{me}$ ,

где

$$\mathbf{B}_{me} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] =$$

$$= \frac{R^3}{3} \frac{\kappa_m}{1 + \kappa_m N} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right],$$

и

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_0 + R^3 \frac{\kappa_m}{1 + \kappa_m N} \left[ \frac{3(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{B}_0}{r^3} \right], \quad \mathbf{H}_e = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_e.$$

Из записанных выше соотношений вытекают формулы, которые полезно помнить:

$$\mathbf{M} = \kappa_m \mathbf{H}_i, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_m}{1 + \kappa_m} \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{M} = \frac{\kappa_m}{1 + \kappa_m N} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\kappa_m}{1 + \kappa_m N} \mathbf{B}_0.$$

### III-й тип задач (3.3)

3.3.1. Достаточно длинный цилиндрический соленоид радиуса  $R$  имеет однослойную обмотку. На каком расстоянии от одного из концов соленоида маленький парамагнитный шарик, расположенный на оси соленоида, будет испытывать максимальную силу?

Решение. Индукция магнитного поля вблизи торца полубесконечного соленоида равна (см. задачу 5.5).

$$B_{0z} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n l \left[ 1 - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right].$$

Для маленького парамагнитного шарика поле квази-однородно, поэтому

$$|m| = m_z = \frac{1}{\mu_0} \kappa_T V B_{0z},$$

где  $V$  — объем шарика, а  $\kappa_T$  — восприимчивость тела,  $\kappa_T = \frac{3\kappa_m}{3 + \kappa_m}$  и  $\kappa_m$  — восприимчивость вещества; фактор формы равен  $1/3$ . Тогда

$$F_z = -m_z \frac{\partial B_{0z}}{\partial z} = -\frac{1}{\mu_0} \kappa_T V B_{0z} \frac{\partial B_{0z}}{\partial z}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 n l \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

получим

$$F_z = \frac{1}{\mu_0} \kappa_T V \left( \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R n l \right)^2 \left[ \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^2} \right].$$

Так как  $F = F_{\max}$  при  $\frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$  и  $\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} < 0$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} [(R^2 + z^2)^{-3/2} - z(R^2 + z^2)^{-2}] = 0$$

что дает  $z = R/\sqrt{15}$ .

## 4. Контрольные вопросы

4.1. Напишите размерности в единицах системы СИ и CGSM вектора намагниченности, напряженности и потока вектора напряженности магнитного поля.

4.2. Для описания магнитного поля внутри магнетика используют вектор напряженности магнитного поля. Что можно сказать о линиях напряженности магнитного поля, созданного только намагниченным магнетиком? Может ли величина  $\operatorname{div} \mathbf{H}_m$  быть отличной от нуля? Если может, то в каких случаях и чему она равна?

4.3. Известно, что восприимчивость слабомагнитных веществ (парамагнетиков и диамагнетиков) значительно меньше единицы ( $\chi_m \sim 10^{-4} - 10^{-7}$ ). Как это сказывается на восприимчивости слабомагнитного тела? В каком случае форма слабомагнитного тела не имеет значения и в каком случае она является существенной?

4.4. Если восприимчивость магнитомягкого ферромагнетика достаточно велика, то такой ферромагнетик может служить магнитоэстатическим экраном (аналог проводника в электростатике). Будет ли такой ферромагнетик осуществлять роль магнитоэстатического экрана в любом по величине магнитном поле? Если нет, то укажите причину ограничения.

4.5. В отличие от слабомагнитных веществ (парамагнетиков и диамагнетиков) восприимчивость магнитомягких ферромагнетиков в пределах линейной аппроксимации значительно больше единицы (для некоторых материалов  $\chi_m \sim 10^5$ ). Как это сказывается на восприимчивости тела из магнитомягкого ферромагнетика?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Вычислите индукцию и напряженность магнитного поля, созданного однородно намагниченным ферромагнетиком ( $\mathbf{M} = \text{const}$ ), имеющем форму шара радиуса  $R$ , если его намагниченность равна  $\mathbf{M}$ .

Ответ.

при  $r < R$   $\mathbf{B}_{mi} = \mu_0 (2/3) \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H}_{mi} = -3^{-1} \mathbf{M}$ .

при  $r > R$

$$\mathbf{B}_{me} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4}{3} \pi R^3 \left[ \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \right], \quad \mathbf{H}_{me} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{me}.$$

5.2. Сферическое тело из «жесткого» ферромагнетика (постоянный магнит) объемом  $V$  находится в однородном магнитном поле, индукция которого  $\mathbf{B}_0$ . Вычислите потенциальную энергию взаимодействия ферромагнетика с внешним полем, предполагая, что его намагниченность  $\mathbf{M}$  ( $\mathbf{M} = \text{const}$ ) образует с направлением поля угол  $\theta$ . Чему равна энергия ферромагнетика в собственном деполяризующем поле?

О т в е т.  $W_0 = -VM B_0 \cos \theta, \quad W_m = 6^{-1} V \mu_0 M^2.$

5.3. Вычислите работу, необходимую для выталкивания 1 г парамагнитного вещества с удельной восприимчивостью  $\chi_{\text{уд}}$  из области с индукцией магнитного поля  $B_0$  в область с пренебрежимо малой индукцией магнитного поля?

О т в е т.  $A = 2^{-1} \mu^{-1} \rho^{-1} \chi_{\text{уд}} (B_0)^2$ ,  
где  $\rho$  — плотность вещества парамагнетика.

## Раздел VII

### ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

#### 1. Теоретический материал

Перенос заряда и плотность тока. Полный ток. Уравнение непрерывности. Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной и интегральной форме. Стационарные токи. Условия стационарности токов в дифференциальной и интегральной форме. Проводимость и сопротивление. Удельная проводимость и удельное сопротивление. Закон Ома в дифференциальной и интегральной форме. Источники тока. Сторонние электродвижущие силы. Обобщенный закон Ома в дифференциальной и интегральной форме. Работа и мощность постоянного тока. Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной и ин-

тегральной форме. Закон сохранения энергии для постоянного тока. Линейные проводники. Сопротивление проводников. Электрические цепи и их элементы. Методы измерения ЭДС, напряжений, токов и сопротивлений. Расчет электрических цепей. Первое и второе правила Кирхгофа. Контурные токи. Постоянные токи в проводящих средах. Условия на границе раздела двух сред. Заземление линий передач.

## 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Почему полный ток и плотность тока считаются непрерывными величинами, хотя заряд электрона квантован?

2.2. Напишите условие стационарности токов в сплошной среде.

2.3. Что можно сказать о геометрии линейных стационарных токов?

2.4. Как определяется сопротивление линейных проводников?

2.5. Каково электрическое поле внутри и вне проводника с током?

2.6. Что является источником поля внутри проводника с током?

2.7. Как записать закон Ома для участка цепи?

2.8. Что такое электродвижущая сила?

2.9. Как записать закон Ома для сплошной среды?

2.10. Что такое шунт?

2.11. Как выглядит распределение потенциала в замкнутой и разомкнутой цепи?

2.12. Чем определяется КПД передачи энергии постоянным током?

2.13. Как записать закон сохранения энергии для постоянного тока?

2.14. Каковы правила знаков при написании уравнений Кирхгофа?

2.15. Как подсчитать число независимых контуров в сложной цепи?

2.16. Какое количество энергии расходуется в единице объема проводящей среды для заданной плотности тока?

2.17. В чем состоит компенсационный метод измерения ЭДС источников, сопротивлений и напряжений?

**2.18.** Чему равно напряжение на зажимах разомкнутого и замкнутого на внешнюю цепь источника ЭДС?

**2.19.** Каково действие заземления в линиях связи?

**2.20.** Что такое эквивалентное сопротивление?

**2.21.** Что такое эквивалентная ЭДС?

**2.22.** Как определить физические токи, если известны контурные?

**2.23.** Какой смысл имеет отрицательное значение контурного или физического тока?

**2.24.** Как определяются ветвь, узел и независимый контур для произвольной электрической цепи?

**2.25.** Что такое короткое замыкание?

**2.26.** Как устроен делитель напряжений?

**2.27.** В чем состоит мостовой метод (мост Уинстона) измерения сопротивлений?

### **3. Основные типы задач и методы их решения**

#### **а) Классификация**

**3.1.** Задачи на расчет электрических цепей (нахождение токов, падений напряжений, сопротивлений и т. д.).

Метод решения. Использование закона Ома, правил Кирхгофа, метода контурных токов.

**3.2.** Задачи на расчет сопротивлений, падений напряжений, токов утечки и т. д. в сплошной среде.

Метод решения. Использование закона Ома в дифференциальной и интегральной форме и условий на границе раздела двух сред.

**3.3.** Задачи на расчет мощности, выделяемой во внешней цепи, КПД источника тока, потери энергии на джоулево тепло в сплошной среде, на определение сил взаимодействия и т. д.

Метод решения. Использование закона сохранения энергии, закона Джоуля—Ленца, закона Ома, закона сохранения электрического заряда, метода контурных токов.



## 6) Примеры

### I-й тип задач (3.1)

3.1.1. В цепи, изображенной на рис. 34, найти токи через каждую ветвь, если ЭДС источников тока равны  $E_1=1$  В,  $E_2=3$  В,  $E_3=5$  В, а сопротивления —  $r_1=2$  Ом,  $r_2=4$  Ом,  $r_3=2$  Ом. Внутренним сопротивлением пренебречь.

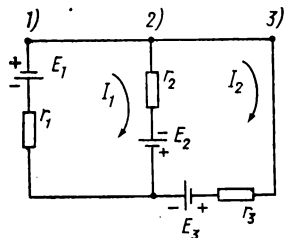


Рис. 34

Решение. Составляем уравнения для контурных токов (рис. 34):

$$\begin{aligned} I_1(r_1 + r_2) - I_2 r_2 &= E_1 + E_2, \\ -I_1 r_2 + I_2(r_2 + r_3) &= -E_2 - E_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Подставляя числовые значения, получим

$$6I_1 - 4I_2 = 4, \quad -4I_1 + 6I_2 = -8. \quad (1')$$

Решаем систему (1') методом определителей Крамера

$$I_1 = \Delta_1 / \Delta, \quad I_2 = \Delta_2 / \Delta, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -8;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -32.$$

Подставляя значения определителей в (2), получим

$$I_1 = \Delta_1 / \Delta = -0,4 \text{ А},$$

$$I_2 = \Delta_2 / \Delta = -1,6 \text{ А}.$$

Находим физические токи.

В 1-й ветви физический и контурный токи совпадают:

$$J_1 = I_1 = -0,4 \text{ А}.$$

Знак минус означает, что реально ток течет в направлении, противоположном выбранному.

Во 2-й ветви физический ток равен

$$J_2 = I_1 - I_2 = 1,2 \text{ А}.$$

В 3-й ветви

$$J_3 = I_2 = 1,6 \text{ A.}$$

II-й тип задач (3.2)

3.2.1. Определить сопротивление изоляции на один погонный метр длины провода диаметром  $d=2$  мм, если диаметр наружной проводящей оболочки равен  $D=4$  мм, а удельное сопротивление фарфоровой изоляции равно  $\rho=10^{13}$  Ом·м (рис. 35).

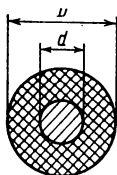


Рис. 35

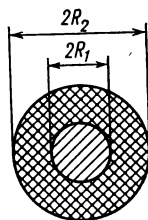


Рис. 36

Решение. В цилиндрической системе координат закон Ома в дифференциальной форме имеет вид (проекция на радиус-вектор)

$$j = \lambda E = E/\rho. \quad (1)$$

Электрическое поле  $E$  выразим через потенциал

$$|E| = \left| \frac{du}{dr} \right| = \frac{U_0}{\ln(D/d)} \frac{1}{r}, \quad (2)$$

где  $U_0$  — напряжение между проводом и наружной оболочкой изоляции.

Из (1) и (2) найдем, что

$$j = \frac{U_0}{\rho \ln(D/d)} \frac{1}{r}.$$

Полный ток, отнесенный к длине провода  $l$ , будет

$$I = jS = \frac{U_0}{\rho \ln(D/d)} \frac{1}{r} 2\pi r l = \frac{2\pi l U_0}{\rho \ln(D/d)}.$$

Так как согласно закону Ома сила тока пропорциональна напряжению, то сопротивление изоляции на

единицу длины провода равно

$$R = \frac{\rho \ln(D/d)}{2\pi} = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ Ом.}$$

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Определить количество энергии, поглощаемой в единицу времени веществом с удельным сопротивлением  $\rho = 10^9 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , которое заполняет пространство между двумя сферическими оболочками с радиусами  $R_1 = 1 \text{ см}$  и  $R_2 = 2 \text{ см}$ , между которыми поддерживается разность потенциалов  $U_0 = 1000 \text{ В}$ .

Решение. Используя закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме, найдем поглощаемую мощность в виде интеграла по сферическому слою (рис. 36):

$$P = \int j^2 \rho dV. \quad (1)$$

В силу сферической симметрии задачи

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (2)$$

Решая задачу типа 3.2, найдем

$$j = U_0 \frac{1}{\rho (1/R_1 - 1/R_2)} \frac{1}{r^2}. \quad (3)$$

Комбинируя (1) — (3), окончательно находим

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\pi U_0^2}{\rho} \frac{1}{(1/R_1 - 1/R_2)^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{4\pi U_0^2}{\rho} \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} = 0,25 \text{ мВт.} \end{aligned}$$

## 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Чему равно эквивалентное сопротивление в случае последовательного и параллельного соединения  $n$  разных сопротивлений?

**4.2.** Чему равна эквивалентная ЭДС в случае последовательного и параллельного соединения  $n$  разных ЭДС?

4.3. Как связаны между собой числа независимых контуров  $N_k$ , узлов  $N_u$  и ветвей  $N_b$  для произвольной электрической цепи, составленной из линейных проводников?

4.4. Два одинаковых источника тока с ЭДС  $E$  и внутренними сопротивлениями  $r$  один раз присоединяют друг к другу одноименными полюсами, а другой — разноименными. Каково напряжение на зажимах источника в каждом из этих двух случаев?

4.5. При каком сопротивлении нагрузки мощность, выделяемая на ней, максимальна? Чему равен КПД источника в этом случае?

4.6. От чего зависит точность измерения ЭДС компенсационным методом? Как можно оценить ошибку измерения ЭДС?

4.7. Как можно оценить ошибку измерения сопротивления методом моста Уинстона?

4.8. В чем преимущество метода контурных токов при расчете сложных электрических цепей по сравнению с методом Кирхгофа?

4.9. В одном коаксиальном кабеле пространство между внутренним проводом и наружной цилиндрической оболочкой заполнено изолятором с удельным сопротивлением  $\rho_1 = 10^{13}$  Ом·м, а в другом — изолятором с  $\rho_2 = 10^{14}$  Ом·м. В каком кабеле потери на единицу длины кабеля будут больше, если остальные параметры одинаковы?

4.10. На что расходуется энергия источников тока, если все элементы цепи неподвижны?

4.11. На границе раздела двух сред линия тока в первой среде образует угол  $\alpha$  с перпендикуляром к поверхности раздела. Под каким углом к поверхности раздела эта линия тока пойдет во второй среде, если удельные сопротивления сред равны соответственно  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ?

4.12. Пространство между пластинами плоского конденсатора, который присоединен к источнику ЭДС с напряжением  $U_0$ , заполнено наполовину изолятором с удельным сопротивлением  $\rho_1$  (рис. 37), а наполовину — изолятором с удельным сопротивлением  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ). Каковы будут потери мощности в каждом слое?

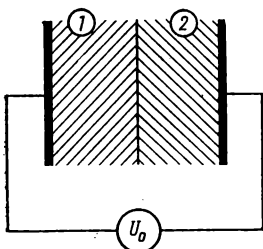


Рис. 37

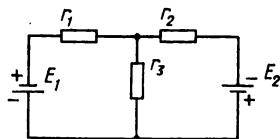


Рис. 38

4.13. Показать, что сопротивление однородной проводящей среды, заполняющей все пространство между двумя идеально проводящими оболочками произвольной формы, равно  $\epsilon\rho/C$ , где  $\rho$  — удельное сопротивление, а  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды;  $C$  — взаимная емкость этой системы электродов-оболочек.

4.14. Рассчитать ЭДС, которая возникает при вращении металлического диска радиуса  $l$  м со скоростью 100 оборотов в секунду между центром диска и точкой на окружности.

4.15. Плоский конденсатор подключен к электрической батарее, поддерживающей на его пластинах разность потенциалов  $U_0$ . В пространство между обкладками конденсатора вдвигается пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , которая заполняет все пространство между обкладками. Определите работу ЭДС батареи и работу механических сил. Совершается ли механическая работа над диэлектриком или самим диэлектриком?

4.16. Нарисуйте графики мощности источника, мощности во внешней цепи, КПД источника и напряжения на зажимах нагрузки в зависимости от тока.

4.17. Нарисуйте графики КПД источника, напряжения на зажимах нагрузки, тока через нагрузку, мощности на нагрузке и мощности источника в зависимости от сопротивления нагрузки.

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Найти токи через сопротивления  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  в

схеме на рис. 38, если  $E_1=5$  В,  $E_2=4$  В,  $r_1=3$  Ом,  $r_2=0,8$  Ом,  $r_3=2$  Ом.

Отв.  $I_1=2,2$  А,  $I_2=1$  А,  $I_3=1,2$  А.

5.2. Известно, что соединение сопротивлений звездой (рис. 39,б) можно преобразовать в соединение

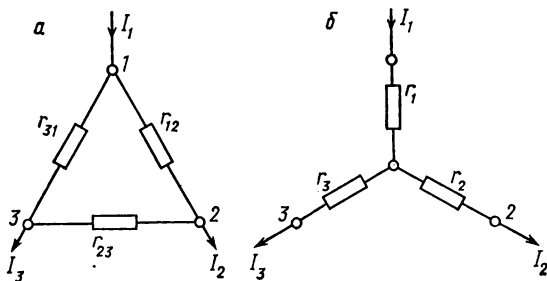


Рис. 39

треугольником (рис. 39,а), а также выполнить обратное преобразование. Получите вид этих преобразований.

Отв.е.

1. Переход от сопротивления звездой к сопротивлению треугольником:

$$r_{12}=r_1+r_2+r_1r_2/r_3,$$

$$r_{23}=r_2+r_3+r_2r_3/r_1,$$

$$r_{31}=r_3+r_1+r_3r_1/r_2.$$

2. Переход от сопротивления треугольником к сопротивлению звездой:

$$r_1=r_{12}r_{31}/(r_{12}+r_{23}+r_{31}),$$

$$r_2=r_{23}r_{12}/(r_{12}+r_{23}+r_{31}),$$

$$r_3=r_{31}r_{23}/(r_{12}+r_{23}+r_{31}).$$

5.3. Определите ток, протекающий через сопротивление гальванометра  $r$  в мостовой системе Уинстона (рис. 40).

Отв.  $I_r=E (r_1r_4-r_2r_3)/B$ , где  $B=r(r_1+r_2)(r_3+r_4)+rr_0(r_1+r_2+r_3+r_4)+r_0(r_1+r_3)(r_2+r_4)+r_1r_2r_3+r_2r_3r_4+r_3r_4r_1+r_4r_1r_2$ .

5.4. При измерении ЭДС компенсационным методом используется схема, показанная на рис. 41. При

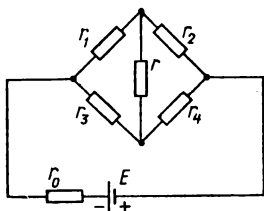


Рис. 40

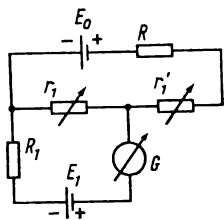


Рис. 41

измерениях сумма переменных сопротивлений  $r_1$  и  $r_1'$  остается постоянной, т. е.  $r = r_1 + r_1' = \text{const}$ . Метод компенсации состоит в том, что подбираются такие сопротивления  $r_1$  и  $r_1'$ , чтобы ток через гальванометр  $G$  был равен нулю. Используя это условие, определите величину ЭДС  $E_1$ . Если вместо ЭДС  $E_1$  включить другую ЭДС  $E_2$  с внутренним сопротивлением  $R_2$ , то компенсации можно достичь при некотором другом значении сопротивления  $r_1$ , равном, например,  $r_2$ . Найдите отношение ЭДС двух батарей  $E_1/E_2$  как функцию сопротивлений  $r_1$  и  $r_2$ , которая и лежит в основе компенсационного метода сравнения ЭДС.

Ответ.  $E_1 = E_0 r_1 / (R + r)$ ;  $E_1/E_2 = r_1/r_2$ .

5.5. Найдите ток в схеме, изображенной на рис. 42, через сопротивление  $r_4$ .

Ответ. 
$$I_{r_4} = \frac{E_1 [r_3'(r_1 + r_2 + r_5 + r_6) + r_3(r_5 + r_6)(r_1 + r_2) + r_3 r_4(r_1 + r_2 + r_5 + r_6) + (r_1 + r_5)(r_2 + r_6)]}{+ r_4(r_1 + r_5)(r_2 + r_6) + r_1 r_5 r_6 + r_1 r_2 r_6 + r_1 r_2 r_5 + r_2 r_5 r_6}.$$

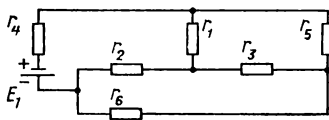


Рис. 42

5.6. Определите сечение медных проводов, которые используются для передачи мощности 8 кВт на расстоянии 90 м при напряжении на нагрузке 110 В. Потери мощности

в двухпроводной линии не превышают 5%. Удельное сопротивление меди равно  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ .

О т в е т.  $S = 3,1 \text{ мм}^2$ .

5.7. Свинцовая проволочка диаметром  $d_1 = 1 \text{ мм}$  в плавком предохранителе расплавляется в течение одного часа при токе 10 А. Определить, при каком токе расплавится свинцовая проволочка той же длины, но диаметром  $d_2 = 2 \text{ мм}$  за то же время. Считать, что потери теплоты проволочки в окружающее пространство прямо пропорциональны поверхности проволочки, проволочки имеют постоянную температуру по длине и что контакт осуществляется со свинцом большой массы, имеющим комнатную температуру  $20^\circ\text{C}$ .

О т в е т.  $I_2 = 29 \text{ А}$ .

5.8. Два металлических шара одинакового радиуса  $r$  погружены в однородную среду с удельным сопротивлением  $\rho$ . Чему равно сопротивление  $R$  среды между шарами? Считать, что расстояние между шарами очень велико по сравнению с их радиусами.

О т в е т:  $R = \rho/2\pi r$ .

5.9. Решить задачу 5.8, в которой шары заменены двумя телами с размерами  $r \ll d$ , где  $d$  — расстояние между ними и емкостями  $C_1$  и  $C_2$ . Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$ .

О т в е т.  $R = \rho\epsilon(1/C_1 + 1/C_2)$ .

5.10. Во сколько раз следует повысить напряжение ЭДС источника, чтобы снизить потери мощности в линии в 100 раз при передаче той же самой мощности. Считать, что в первом случае падение напряжения в линии равно  $\Delta U = nU$ , где  $U$  — напряжение на нагрузке,  $n = \text{const}$ .

О т в е т. В 10 раз.

5.11. Между двумя проводящими сферическими оболочками с радиусами  $r_1$  и  $r_3$  ( $r_1 < r_3$ ) находятся два сферических слоя диэлектрика с удельными сопротивлениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и радиусами  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_2$ ,  $r_3$  со-



ответственно. Определить потери мощности в каждом из слоев, если между проводящими оболочками поддерживается разность потенциалов  $U$ .

О т в е т.  $W_1 = U^2 \cdot R_1 / (R_1 + R_2)^2$ ;  $W_2 = U^2 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)^2$ ,

где  $R_1 = \rho_1 \frac{1 - r_1/r_2}{4\pi r_1}$ ;  $R_2 = \rho_2 \frac{1 - r_2/r_3}{4\pi r_2}$ .

5.12. Две коаксиальные трубки с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) нижними концами погружаются в масляную ванну. На какую высоту поднимется масло в промежутке между трубками, если между ними поддерживается разность потенциалов  $U$ ? Диэлектрическая проницаемость масла  $\epsilon$ , плотность  $\rho$ .

О т в е т.  $h = \frac{U^2 (\epsilon - 1) \epsilon_0}{\rho g (R_2^2 - R_1^2) \ln (R_2/R_1)}$ .

5.13. В случае короткого замыкания провода с мачтой заземление последней можно заменить эквивалентной полушаровой поверхностью с диаметром, равным поперечным размерам мачты  $d = 3$  м. Считая проводимость земли равной  $\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1} \times \text{см}^{-1}$ , определить «шаговое» напряжение  $U_{\text{ш}}$ , под которым может оказаться человек, делающий шаг длиной  $l = 0,75$  м на расстоянии  $b = 1$  м от ближайшей ноги до мачты, если ток короткого замыкания равен 400 А.

О т в е т.  $U_{\text{ш}} = 740$  В.

5.14. Провод, по которому течет ток силой  $I$ , оборвался и упал на землю по очень большой длине  $L$ . Определить «шаговое» напряжение, под которым окажется человек с длиной шага  $l$ , приближающийся к проводу в перпендикулярном направлении на значительном расстоянии от краев провода. Расстояние до ближайшей к проводу ноги человека равно  $r_0$ . Найти величину шагового напряжения при следующих значениях параметров: проводимость земли  $\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $r_0 = 1$  м,  $l = 0,75$  м,  $L = 300$  м,  $I = 500$  А.

О т в е т.  $U_{\text{ш}} = 26,6$  В.

5.15. Пространство между двумя проводящими цилиндрическими оболочками с радиусами  $r_1$  и  $r_3$  ( $r_1 < r_3$ ) заполнено двумя цилиндрическими слоями диэлектрика с удельными сопротивлениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и радиусами  $r_1, r_2$  и  $r_2, r_3$  соответственно. Найти потери мощности в каждом из слоев, если между проводящими оболочками поддерживается разность потенциалов  $U$ .

Ответ.  $W_1 = U^2 R_1 / (R_1 + R_2)^2$ ;  $W_2 = U^2 R_2 / (R_1 + R_2)^2$ , где  $R_1 = \rho_1 \ln(r_2/r_1) / 2\pi l$ ;  $R_2 = \rho_2 \ln(r_3/r_2) / 2\pi l$ .

## Раздел VIII

### ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

#### 1. Теоретический материал

Явление электромагнитной индукции. Основной закон электромагнитной индукции Фарадея, Закон Ленца. Проводящий стержень, движущийся в однородном магнитном поле. Рамка, движущаяся в однородном и неоднородном магнитных полях. Случай, когда рамка покоится, а источник магнитного поля движется. Явление униполярной индукции. Закон Фарадея в интегральной и дифференциальной форме. Явление самоиндукции. Экстратоки размыкания и замыкания. Взаимная индукция. Энергия магнитного поля. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индуктивности. Контур, содержащий индуктивность. Установление и исчезновение тока в контуре, содержащем индуктивность. Вихревое электрическое поле. Вихревые токи (токи Фуко). Бетатрон. Закон сохранения энергии при наличии магнитного поля. Собственные электрические колебания. Ток смещения. Затухание колебаний. Уравнение собственных электрических колебаний. Колебания в отсутствие затухания. Колебания при наличии затухания. поддержа-

ние колебаний. Автоколебательные системы. Переменный ток. Сопротивление, емкость и индуктивность в цепи переменного тока. Закон Ома для переменных токов. Правила Кирхгофа. Резонанс напряжений. Резонанс токов. Работа и мощность переменного тока. Методы расчета цепей переменного тока. Комплексные сопротивления. Активная и реактивная мощности. Метод контурных токов. Метод векторных диаграмм. Синхронный двигатель. Асинхронный двигатель. Генераторы переменного тока. Трансформатор.

## **2. Вопросы по теоретическому материалу**

**2.1.** Почему при поступательном движении контура в однородном магнитном поле не возникает индукционный ток?

**2.2.** Как определить направление индукционного тока?

**2.3.** Какова причина ускорения электронов в бетатроне?

**2.4.** В чем причина возникновения ЭДС униполярной индукции?

**2.5.** Какие способы измерения магнитной индукции основаны на использовании явления электромагнитной индукции?

**2.6.** Каков принцип действия пояса Роговского?

**2.7.** Как определяется магнитная проницаемость вещества?

**2.8.** Какие способы измерения коэффициентов самоиндукции Вы знаете?

**2.9.** Как выразить время релаксации цепи, содержащей индуктивность и сопротивление?

**2.10.** Как можно рассчитать энергию магнитного поля?

**2.11.** Куда направлен вектор мгновенного ускорения электрона в бетатроне?

**2.12.** Как зависит индуктивность соленоида от его длины и полного числа витков?

**2.13.** Зависит ли индуктивность длинного соленоида от его диаметра?

**2.14.** Какие возникают механические силы, если через обмотку соленоида пропустить ток?

2.15. За счет каких факторов может изменяться поток магнитной индукции через заданный контур?

2.16. Опишите превращения различных видов энергии при медленном сближении двух контуров с током.

2.17. Запишите уравнение баланса энергии при наличии магнитного поля.

2.18. Чему равна механическая работа при медленном сближении двух контуров с током?

2.19. Опишите превращения энергии в колебательном контуре.

2.20. Как выражается частота электрических колебаний через параметры контура?

2.21. Чем определяется затухание электрических колебаний?

2.22. Что такое логарифмический декремент затухания?

2.23. Как определяется добротность контура?

2.24. При каких соотношениях между параметрами контура происходит апериодический разряд?

2.25. Как можно поддерживать колебания в контуре?

2.26. Что такое автоколебательная система?

2.27. Определите абсолютную и относительную расстройку контура.

2.28. Запишите уравнение резонансной кривой.

2.29. Запишите уравнение фазовой характеристики.

2.30. Как определяется эффективное (действующее) и среднее значение переменного тока?

2.31. Во сколько раз напряжение на конденсаторе больше ЭДС генератора при резонансе в последовательном контуре?

2.32. Во сколько раз ток при резонансе в параллельном контуре больше тока в неразветвленной цепи?

2.33. Как определяется полоса пропускания контура?

2.34. Как определяется омическая и реактивная мощность переменного тока?

2.35. Опишите метод контурных токов в применении для расчета электрических цепей переменного тока.

- 2.36. Что такое импеданс электрической цепи?
- 2.37. Как построить векторные диаграммы для последовательного и параллельного контуров?
- 2.38. Опишите принцип работы синхронного двигателя.
- 2.39. Почему ротор должен вращаться синхронно с изменением переменного тока?
- 2.40. Как можно создать вращающееся магнитное поле?
- 2.41. Опишите принцип работы асинхронного двигателя переменного тока.
- 2.42. Почему число оборотов асинхронного двигателя изменяется с изменением нагрузки?
- 2.43. Как устроен генератор переменного тока?
- 2.44. Как устроен трансформатор?
- 2.45. Что такое коэффициент трансформации?
- 2.46. От чего зависит КПД трансформатора?
- 2.47. В чем состоят опыты холостого хода и короткого замыкания трансформатора?

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Классификация

3.1. Задачи на определение ЭДС электромагнитной индукции, токов электромагнитной индукции, а также сил, ускорений и других величин, возникающих благодаря явлению электромагнитной индукции.

Метод решения. Использование основного закона Фарадея для электромагнитной индукции в интегральной или дифференциальной форме, использование выражения для силы Лоренца.

3.2. Расчет коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции.

Метод решения. Использование связи между потоком магнитного поля и энергией магнитного поля и коэффициентами самоиндукции и взаимной индукции.

3.3. Расчет переходных и колебательных процессов.

Метод решения. Использование уравнений Кирхгофа.

3.4. Определение действующих и средних значений токов и напряжений.

Метод решения. Использование определений средних и действующих значений токов и напряжений.

### 3.5. Расчет цепей переменного тока.

Метод решения. Использование правил Кирхгофа, закона Ома для цепи переменного тока, метода контурных токов, метода векторных диаграмм.

3.6. Расчет резонансных явлений в последовательных и параллельных контурах.

Метод решения. Использование закона Ома, правил Кирхгофа, метода контурных токов, метода векторных диаграмм и определений, характеризующих резонансные явления.

3.7. Расчет потерь мощности в цепях переменного тока и работы переменного тока.

Метод решения. Использование формул для мощности в случае переменного тока.

### 3.8. Расчет трансформаторов.

Метод решения. Использование закона электромагнитной индукции, закона Ома, правил Кирхгофа, метода контурных токов, метода векторных диаграмм и определений, характеризующих трансформатор.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. Прямоугольная рамка размером  $a \times b$  метров вращается вокруг стороны  $a$  в однородном магнитном поле  $B$  с переменной угловой скоростью  $\omega = \omega_0(1 - \exp(-t/\tau))$ . Определить величину индуцированной ЭДС  $\mathcal{E}$ , если в начальный момент рамка перпендикулярна к полю.

Решение. Найдем закон движения рамки (т. е. зависимость  $\varphi(t)$ ), если в начальный момент угол между перпендикуляром к плоскости рамки и полем равен  $\varphi_0 = 0$  (рис. 43):

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \omega_0 [t + (\exp(-t/\tau) - 1)\tau]. \quad (1)$$

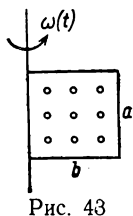


Рис. 43

Магнитный поток через плоскость рамки запишем в виде

$$\Phi = ab B \cos \varphi(t). \quad (2)$$

По определению ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt = ab B \sin \varphi(t) \cdot \omega(t) = ab B \omega_0 (1 - \exp(-t/\tau)) \times \sin[\omega_0 \{t + (\exp(-t/\tau) - 1)\tau\}].$$

**3.1.2.** Два параллельных провода, замкнутых на одном конце сопротивлением  $R$ , расположены в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ . Считая, что поле  $B$  перпендикулярно плоскости проводов, найдите ток  $I$ , который течет через проводящую перекладину между проводами,двигающуюся с постоянной скоростью  $v$  (рис. 44). Расстояние между проводами равно  $l$ .

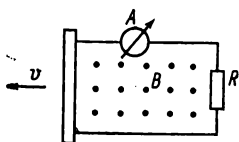


Рис. 44

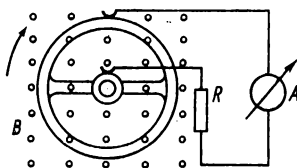


Рис. 45

**Решение.** На электроны в перекладине действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (1)$$

С силой (1) связано электрическое поле

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (2)$$

которое появляется в системе координат, связанной с перекладиной. Это поле приводит к ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = vlB. \quad (3)$$

Поэтому через перекладину потечет ток

$$I = \mathcal{E}/R = vlB/R. \quad (4)$$

**3.1.3.** Медный диск радиуса  $a=10$  см вращается в однородном магнитном поле, делая  $N=100$  оборо-

тов в секунду. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости диска и имеет индукцию  $B = 1 \text{ Вб/м}^2$ . Две щетки, одна на оси диска, другая на окружности (рис. 45), соединяют диск с внешней цепью, в которую включены реостат с сопротивлением  $R = 10 \text{ Ом}$  и амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь.

Что показывает амперметр?

Решение. В системе координат, связанной с диском, возникает электрическое поле

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

которое приводит к ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = \int_0^a (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \int_0^a 2\pi N B x dx = \pi N B a^2. \quad (2)$$

Ток по закону Ома

$$I = \mathcal{E}/R = \pi N B a^2 / R = 0,314 \text{ А}.$$

3.1.4. В середине длинного соленоида на расстоянии  $b = 5 \text{ см}$  от его оси расположен электрон. В момент времени  $t = 0$  через соленоид начинают пропускать ток, изменяющийся со временем по закону  $I(t) = I_0 t$ . Найдите мгновенное ускорение электрона, считая поле внутри соленоида однородным.  $I_0 = 8 \text{ А/с}$ , число витков на единицу длины соленоида  $n = 10^3 \text{ витков/м}$ , начальная скорость электрона равна нулю.

Решение. Магнитное поле внутри соленоида равно

$$B = \frac{4\pi n I_0 t}{10^7} \text{ Вб/м}^2. \quad (1)$$

Переменное магнитное поле приводит к вихревому электрическому полю

$$E = - \frac{\dot{B} b^2}{2\pi b}. \quad (2)$$

Мгновенное ускорение

$$a = \frac{eE}{m} = - \frac{e}{m} \frac{2\pi n I_0 b}{10^7} = 4 \cdot 10^7 \text{ м/с}^2.$$



## II-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Найдите коэффициент самоиндукции  $L$  длинного соленоида. Число витков на единицу длины равно  $n$ , а длина соленоида  $l$ .

Решение. Магнитное поле внутри соленоида можно найти по теореме Стокса

$$B = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где  $I$  — ток в обмотке соленоида. Магнитный поток через все витки, если пренебречь рассеянным полем, равен

$$\Phi = B S n l, \quad (2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения соленоида.

С другой стороны, известно следующее выражение для магнитного потока:

$$\Phi = L I. \quad (3)$$

Используя (1) — (3), окончательно находим

$$L = \mu_0 n^2 l S.$$

**3.2.2.** Тороидальная катушка из  $N$  витков, внутренний радиус которой равен  $b$ , в поперечном сечении имеет форму квадрата со стороной  $a$  (рис. 46). Найдите индуктивность катушки  $L$ .

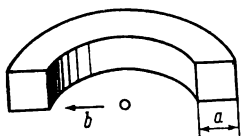


Рис. 46

Решение. Магнитное поле внутри катушки можно найти по теореме Стокса

$$B = \mu_0 N I / 2 \pi r, \quad (1)$$

где  $I$  — ток, протекающий по обмотке катушки и  $b < r < b + a$ .

Энергия магнитного поля внутри катушки

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi} a \ln \left( \frac{b+a}{b} \right). \quad (2)$$

С другой стороны, магнитная энергия катушки равна

$$U_m = (1/2) L I^2. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), находим для самоиндукции катушки

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{b} \right).$$

**3.2.3.** На тороидальную катушку намотаны две вплотную прилегающие друг к другу системы обмоток с полными числами витков  $N_1$  и  $N_2$ . Считая радиус одного витка обмотки равным  $r$  и радиус тора —  $R$  ( $r \ll R$ ), найдите коэффициент взаимной индукции катушек.

Решение. Магнитное поле, создаваемое одной катушкой внутри тора, равно

$$B = \mu_0 I_1 N_1 / 2\pi R, \quad (1)$$

где  $I_1$  — ток в обмотке первой катушки. Магнитный поток через все витки второй катушки

$$\Phi = N_2 BS, \quad (2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения тора.

Так как, с другой стороны, известно, что

$$\Phi = L_{12} I_1, \quad (3)$$

то используя (1)—(3), окончательно находим для коэффициента взаимной индукции

$$L_{12} = 0,5 \mu_0 N_1 N_2 r^2 / R. \quad (4)$$

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Катушка, индуктивность которой  $L = 10$  мГн и сопротивление  $R = 2$  Ом, подключается к источнику постоянного напряжения  $U = 50$  В. Чему равно время релаксации для этой катушки? С какой скоростью нарастает ток в начальный момент? Чему равно установившееся значение тока?

Решение. По условию в момент  $t = 0$  включает рубильник  $P$  (рис. 47). По 2-му закону Кирхгофа имеем

$$-L \frac{dI}{dt} + U = IR. \quad (1)$$

Решая (1), находим

$$I = UR^{-1} (1 - \exp(-t/\tau)), \quad (2)$$

где время релаксации

$$\tau = LR^{-1} = 5 \text{ мс.}$$

Скорость нарастания тока в начальный момент

$$dI/dt|_{t=0} = U(R\tau)^{-1} = 5 \cdot 10^3 \text{ А/с.}$$

Установившееся значение тока

$$I|_{t=\infty} = UR^{-1} = 25 \text{ А.}$$

#### IV-й тип задач (3.4)

3.4.1. Найдите действующее и среднее значение тока, график изменения которого за период  $T$  показан на рис. 48.

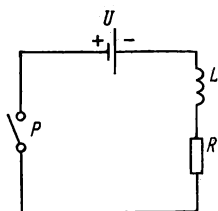


Рис. 47

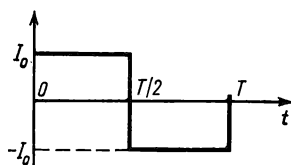


Рис. 48

Решение. По определению действующее значение

$$I_{\text{д}} = \left( T^{-1} \int_0^T I^2(t) dt \right)^{1/2} = I_0,$$

среднее значение

$$I_{\text{ср}} = T^{-1} \int_0^T I(t) dt = 0.$$

#### V-й тип задач (3.5)

3.5.1. Катушка с индуктивностью  $L=50$  мГн и активным сопротивлением  $r=10$  Ом подключена к источнику синусоидального напряжения, действующее значение которого  $U_{\text{д}}=120$  В, а частота  $\nu=50$  Гц. Определить полное сопротивление катушки, ток и сдвиг фаз между напряжением и током.

Решение. По определению:

$$Z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = 18,6 \text{ Ом},$$

$$\text{tg}\varphi = \omega L/r = 1,57; \varphi = 57^\circ 30';$$

$$I_d = U_d/Z = 6,45 \text{ А}.$$

3.5.2. В схеме, показанной на рис. 49, рассчитать токи через сопротивления  $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$ . Емкость  $C = 3,18 \text{ мкФ}$ , ЭДС генератора  $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ В}$ , а частота  $\nu = 50 \text{ кГц}$ . Как сдвинут по фазе ток через сопротивление  $r_3$  относительно тока через  $r_1$ ?

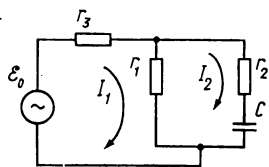


Рис. 49

Решение. Составляем уравнения для контурных токов, считая начальную фазу ЭДС  $\mathcal{E}_0$  равной нулю:

$$\left. \begin{aligned} I_1 r_3 + (I_1 - I_2) r_1 &= \mathcal{E}_0, \\ (I_2 - I_1) r_1 + I_2 r_2 + \frac{1}{i\omega C} I_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Или

$$\left. \begin{aligned} (r_1 + r_3) I_1 - r_1 I_2 &= \mathcal{E}_0, \\ -r_1 I_1 + \left( r_1 + r_2 - \frac{i}{\omega C} \right) I_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Решая систему (1'), находим:

$$I_1 = \Delta_1 / \Delta = \frac{10}{13} (8 + i),$$

$$I_2 = \Delta_2 / \Delta = \frac{10}{13} (3 + 2i),$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1 + r_3 & -r_1 \\ -r_1 & r_1 + r_2 - \frac{i}{\omega C} \end{vmatrix} =$$

$$= r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 - i \frac{r_1 + r_3}{\omega C} = 3 - 2i,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathcal{E}_0 & -r_1 \\ 0 & r_1 + r_2 - \frac{i}{\omega C} \end{vmatrix} = \mathcal{E}_0 (r_1 + r_2 - i/\omega C) = 10 (2 - i),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} r_1 + r_3 & \mathcal{E}_0 \\ -r_1 & 0 \end{vmatrix} = r_1 \mathcal{E}_0 = 10.$$

Физический ток через сопротивление  $r_3$  равен контурному току  $I_1$ , т. е.

$$I_{r_3} = I_1 = \frac{10}{13} (8 + i) = 6,21e^{i7^\circ 5'} \text{ А.}$$

Физический ток через сопротивление  $r_2$  равен контурному току  $I_2$ , т. е.

$$I_{r_2} = I_2 = \frac{10}{13} (3 + 2i) = 2,78e^{i33^\circ 40'} \text{ А.}$$

Физический ток через сопротивление  $r_1$  равен разности контурных токов  $I_1 - I_2$ , т. е.

$$I_{r_1} = I_1 - I_2 = \frac{10}{13} (5 - i) = 3,95e^{-i11^\circ 19'}.$$

Ток через сопротивление  $r_3$  сдвинут по фазе относительно тока через  $r_1$  на угол

$$\Delta\varphi = 7^\circ 5' + 11^\circ 19' = 18^\circ 26,5'.$$

**3.5.3.** Найдите, пользуясь векторным методом, напряжение на конденсаторе  $U_c$  в схеме на рис. 50, если

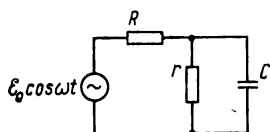


Рис. 50

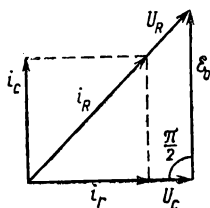


Рис. 51

параметры схемы таковы, что напряжение  $U_c$  отстает по фазе от напряжения генератора на угол  $\pi/2$ .

Решение. Векторная диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 51. Используя закон Ома и теорему Пифагора, получаем уравнение

$$U_C^2 \frac{R^2}{r^2} (1 + r^2 \omega^2 C^2) = \mathcal{E}_0^2 + U_C^2,$$

откуда

$$U_c = \mathcal{E}_0 / \sqrt{1 + R^2/r^2 + \omega^2 C^2 R^2}.$$

# VI-й тип задач (3.6)

**3.6.1.** Определить емкость  $C$ , которую надо включать последовательно с катушкой, имеющей активное сопротивление  $r=10$  Ом и индуктивность  $3,18$  мГн для того, чтобы цепь была настроена в резонанс при частоте  $\nu_0=50$  кГц. Найти напряжение на конденсаторе при резонансе, добротность и затухание контура и полосу пропускания, если к контуру приложено напряжение  $U=100$  В.

Решение. По определению резонансная частота

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (1)$$

откуда

$$C = 1/\omega_0^2 L = 0,318 \text{ мкФ}.$$

Добротность контура

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10.$$

Напряжение на конденсаторе при резонансе

$$U_C = UQ = 1000 \text{ В}.$$

Затухание контура

$$d = 1/Q = 0,1.$$

Полоса пропускания контура

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \nu_0/Q = 5 \text{ кГц}.$$

**3.6.2.** Найти резонансную частоту и полное сопротивление параллельного контура, изображенного на рис. 52, при резонансе. Параметры контура равны:  $r_1=9$  Ом;  $r=1$  Ом;  $L=100$  мкГн;  $C=100$  пФ. Рассчитать добротность контура и токи, проходящие через каждую из ветвей контура, и в неразветвленной части при резонансе, если к контуру приложено напряжение  $U=200$  В.

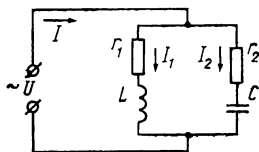


Рис. 52

Решение. Рассчитаем прежде всего добротность контура

$$Q = \sqrt{\frac{L}{C}} / (r_1 + r_2) = 100.$$

Так как добротность велика, то резонансную частоту можно найти по приближенной формуле

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Сопротивление контура при резонансе

$$r_p = Q^2(r_1 + r_2) = 100 \text{ кОм}.$$

Ток в неразветвленной части цепи при резонансе

$$I_p = U/r_p = 2 \text{ мА}.$$

Ток в левой ветви контура при резонансе

$$I_{1p} = U/\sqrt{r_1^2 + (\omega_p L)^2} \approx 0,2 \text{ А}.$$

Ток в правой ветви контура при резонансе

$$I_{2p} = U/\sqrt{r_2^2 + (1/\omega_p C)^2} \approx 0,2 \text{ А}.$$

### VII-й тип задач (3.7)

**3.7.1.** Когда катушка со стальным сердечником (дросселем) включена на напряжение  $U_1=100 \text{ В}$ , по ней проходит ток  $I_1=5 \text{ А}$ , отстающий по фазе от напряжения на угол  $\varphi_1$ , причем  $\cos \varphi_1=0,7$ . Эта же катушка без стального сердечника при том же напряжении потребляет ток  $I_2=10 \text{ А}$ , отстающий от напряжения на угол  $\varphi_2$ , причем  $\cos \varphi_2=0,9$ . Определить потери мощности в стали и проводах катушки.

Решение. В катушке без сердечника имеются потери мощности только в проводах катушки:

$$I_2^2 r = U_2 I_2 \cos \varphi_2. \quad (1)$$

Учитывая, что  $U_2=U_1$ , находим активное сопротивление проводов катушки  $r$ :

$$r = U_1 \cos \varphi_2 / I_2 = 9 \text{ Ом}. \quad (2)$$

Катушка со стальным сердечником потребляет мощность

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 350 \text{ Вт}, \quad (3)$$

причем потери в проводах равны

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 r = 225 \text{ Вт}, \quad (4)$$

а потери в стальном сердечнике

$$P_{\text{ст}} = P_1 - P_{\text{пр}} = 125 \text{ Вт}.$$

### VIII-й тип задач (3.8)

3.8.1. Опыты с однофазным повышающим трансформатором дали следующие результаты напряжения, тока и мощности в первичной обмотке:

а) в режиме холостого хода (хх)

$$U_{\text{хх}} = 400 \text{ В}; I_{\text{хх}} = 0,4 \text{ А}; P_{\text{хх}} = 20 \text{ Вт};$$

б) в режиме короткого замыкания (кз)

$$U_{\text{кз}} = 32 \text{ В}; I_{\text{кз}} = 5 \text{ А}; P_{\text{кз}} = 80 \text{ Вт}.$$

Предполагая, что активное и реактивное сопротивления рассеяния первичной обмотки равны соответственным приведенным сопротивлениям вторичной обмотки (т. е.  $r_{106} = r'_{206} = k^2 r_2$ ;  $X_{1s} = X'_{2s} = k^2 X_{2s}$ , определить их величины, если коэффициент трансформации  $k = n_1/n_2 = 1/15$ . При холостом ходе можно пренебречь падением напряжения в первичной обмотке, а при коротком замыкании — намагничивающей составляющей первичного тока.

Решение. Эквивалентная схема трансформатора изображена на рис. 53.

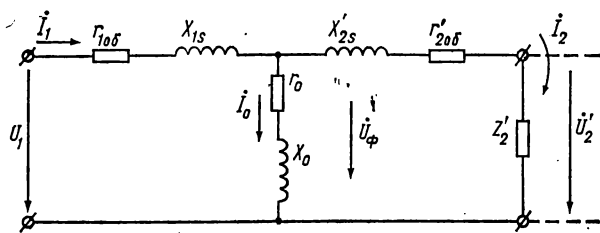


Рис. 53



Из опыта холостого хода, пренебрегая падением напряжения в первичной обмотке, имеем

$$\begin{aligned} Z_{xx} &= U_{1xx}/I_{1xx} = 1000 \text{ Ом}, \\ \cos \varphi_{xx} &= P_{1xx}/U_{1xx} \cdot I_{1xx} = 0,125, \\ r_{xx} &= Z_{xx} \cos \varphi_{xx} = 125 \text{ Ом}, \\ X_{xx} &= Z_{xx} \sin \varphi_{xx} = 992 \text{ Ом}. \end{aligned} \quad (1)$$

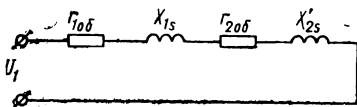


Рис. 54

В случае режима короткого замыкания, если пренебречь намагничивающей составляющей первичного тока, эквивалентная схема трансформатора

имеет вид, изображенный на рис. 54.

Поэтому для опыта короткого замыкания имеем

$$\begin{aligned} Z_{1кз} &= U_{1кз}/I_{1кз} = 6,4 \text{ Ом}, \\ \cos \varphi_{1кз} &= P_{1кз}/U_{1кз} \cdot I_{1кз} = 0,5, \\ r_{106} + r'_{206} &= Z_{1кз} \cos \varphi_{1кз} = 3,2 \text{ Ом}, \\ X_{1s} + X'_{2s} &= Z_{1кз} \sin \varphi_{1кз} = 5,54 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенствами

$$r_{106} = r'_{206}, \quad X_{1s} = X'_{2s},$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} r_{106} &= (r_{106} + r'_{206})/2 = 1,6 \text{ Ом}, \quad r_{206} = r'_2/k^2 = 360 \text{ Ом}, \\ X_{1s} &= (X_{1s} + X'_{2s})/2 = 2,77 \text{ Ом}, \quad X_{2s} = X'_{2s}/k^2 = 623 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

## 4. Контрольные вопросы

4.1. Электрон находится на оси в середине длинного соленоида. Какое мгновенное ускорение испытает электрон при включении тока в соленоиде, если начальная скорость электрона равна нулю?

4.2. Почему в случае униполярной индукции магнитный поток через контур не изменяется, а ЭДС электромагнитной индукции возникает?

4.3. Приведите примеры, когда магнитный поток через контур изменяется, в ЭДС электромагнитной индукции не возникает.

4.4. Как намотать катушку сопротивления, чтобы ее самоиндукция была мала?

4.5. Как определить индуктивность двух последовательно соединенных катушек индуктивностей?

4.6. Чему равна индуктивность двух параллельно соединенных катушек индуктивностей?

4.7. Какую энергию приобретает электрон за один оборот в бетатроне?

4.8. Чем определяется энергия, до которой электрон ускоряется в бетатроне?

4.9. Где запасена электрическая энергия в контуре?

4.10. Где запасена магнитная энергия контура?

4.11. Как затухание изменяет период собственных колебаний?

4.12. Чем отличается контурный ток от физического?

4.13. Сформулируйте правила Кирхгофа.

4.14. Как рассчитать импеданс лестничной цепи?

4.15. Нарисуйте векторные диаграммы резонанса в последовательном и параллельном контурах.

4.16. Чему равно сопротивление параллельного контура при резонансе?

4.17. Как можно определить сдвиг фаз между током и напряжением (или током и током), относящимся к разным ветвям электрической цепи?

4.18. Что такое активная мощность?

4.19. Что такое реактивная мощность?

4.20. Как можно определить мощность, потребляемую некоторым импедансом?

4.21. Почему синхронный двигатель не запускается самостоятельно?

4.22. Почему при перегрузке синхронный двигатель останавливается?

4.23. Как определяется коэффициент скольжения ротора в асинхронном двигателе?

4.24. Как зависит от нагрузки число оборотов ротора в асинхронном двигателе?

4.25. Как связаны между собой входное и выходное напряжение трансформатора?

4.26. Что такое поток рассеяния в трансформаторе?

4.27. Нарисуйте эквивалентную схему трансформатора.

4.28. Как определяются приведенные сопротивления вторичной обмотки трансформатора?

4.29. Почему при холостом ходе можно пренебречь падением напряжения в первичной обмотке трансформатора?

4.30. Почему при режиме короткого замыкания можно пренебречь намагничивающей составляющей первичного тока?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Прямоугольная рамка размером  $a \times b$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг стороны  $b$ , отстоящей на расстоянии  $c > a$  от бесконечно длинного прямолинейного проводника, по которому течет ток  $I_0$ . Найдите ЭДС индукции  $\mathcal{E}$  в рамке.

$$\text{Ответ. } \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \cdot \frac{\ln \left( 1 + \frac{a \cos \omega_0 t}{c} \right)}{1 + \frac{a \cos \omega_0 t}{c}} \frac{a \omega_0}{c} \sin \omega_0 t.$$

5.2. Прямоугольная рамка размером  $a \times b$  движется поступательно со скоростью  $v(t)$  в своей плоскости в направлении, перпендикулярном стороне  $b$ . Найдите ЭДС индукции  $\mathcal{E}$  в рамке, если параллельно стороне в плоскости рамки находится бесконечный прямолинейный провод, по которому течет ток  $I_0$ . В момент времени  $t=0$  рамка находилась на расстоянии  $c > a$  от прямолинейного провода.

$$\text{Ответ. } \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \frac{\ln(1 + a/l)}{1 + a/l} av(t)/l^2,$$

$$\text{где } l = c + \int_0^t v(t) dt.$$

5.3. В однородном магнитном поле с индукцией  $B=0,84$  Вб/м<sup>2</sup> с небольшой скоростью вращается квадратная рамка со стороной  $a=5$  см, состоящая из небольшого числа витков медной проволоки сечением  $S=0,5$  мм<sup>2</sup>. Определите число оборотов рамки в секунду, если максимальное значение силы тока, индуцируемого в рамке при вращении, равно  $I_0=1,9$  А, считая, что концы рамки соединены накоротко.

Ответ:  $N=1$  об/с.

5.4. Жесткий провод, согнутый в полукруг радиуса  $r$ , вращается с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  (рис. 55). Чему равна

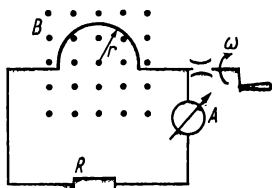


Рис. 55

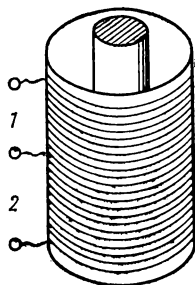


Рис. 56

частота  $\omega'$  и амплитуда  $I_0$  тока, наведенного в проводнике, если провод замкнут на сопротивление  $R$ , а сопротивлением амперметра можно пренебречь? Считать, что магнитное поле наведенного тока мало по сравнению с  $B$ .

Ответ:  $I = I_0 \sin \omega' t$ , где  $I_0 = \pi r^2 B \omega / 2R$ ;  $\omega' = \omega$ .

5.5. Однослойная, достаточно длинная катушка с железным сердечником разделена на две секции (рис. 56). Измерения коэффициентов самоиндукции секций дали для первой секции величину  $L_1 = 0,04$  Гн, а для второй —  $L_2 = 0,09$  Гн. Чему равен коэффициент самоиндукции  $L$  всей катушки? Сколько витков в катушке, если в первой секции  $N_1 = 100$  витков?

Ответ.  $L = 0,25$  Гн;  $N = 250$ .

5.6. На один сердечник намотаны две катушки. Коэффициенты самоиндукции катушек в отдельности соответственно равны  $L_1 = 0,5$  Гн и  $L_2 = 0,7$  Гн. Пренебрегая рассеянием магнитного поля, найдите коэффициент взаимной индукции

Ответ.  $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = 0,6$  Гн.

5.7. На длинный цилиндр намотаны вплотную две обмотки (1, 1') и (2, 2') так, как указано на рис. 57.

Коэффициент самоиндукции каждой обмотки равен  $L_1=L_2=0,5$  Гн. Чему будет равен коэффициент самоиндукции  $L$  всей цепи, если концы 1 и 2' соединить, а в цепь включить концы 1' и 2?

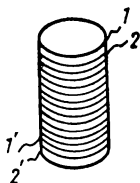


Рис. 57

Ответ.  $L=0,2$  Гн.

5.8. Конденсатор емкостью  $C$  присоединен к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии  $l$  друг от друга. Однородное магнитное поле  $B$  направлено перпендикулярно к плоскости шин. Касаясь шин, без трения падает проводник массы  $m$ . Найдите ускорение проводника  $a$  и силу тока, заряжающего конденсатор  $I$ , если сопротивлением и самоиндукцией проводников можно пренебречь. Начальная скорость проводника равна нулю.

Ответ.

$$a = g / (1 + B^2 l^2 C / m); \quad I = g B l C / (1 + B^2 l^2 C / m).$$

5.9. В условиях предыдущей задачи вместо конденсатора шины наверху замкнуты на индуктивность  $L$ . Найдите закон движения проводника вдоль шин.

Ответ.  $x(t) = mgL(1 - \cos \omega t) / (B^2 l^2)$ , где  $\omega = Bl / (mL)^{1/2}$ .

5.10. В условиях задачи 5.8 вместо конденсатора шины наверху замкнуты на сопротивление  $R$ . Найдите закон движения проводника вдоль шин.

Ответ.  $x(t) = \frac{mR}{B^2 l^2} g t [1 - \exp(-B^2 l^2 t / mR)]$ .

5.11. Заряженный до разности потенциалов  $U_0$  конденсатор емкостью  $C$  разряжается через сопротивление  $R$ . Найдите, как меняется со временем энергия конденсатора.

Ответ.  $W = \frac{CU_0^2}{2} e^{-t/(CR/2)}$ .

5.12. Конденсатор емкостью  $C=1$  мкФ разряжается через сопротивление  $R=1$  кОм. За какое время

напряжение на пластинах уменьшится вдвое от заданной величины?

О т в е т.  $\Delta t = RC \ln 2 = 700$  мс.

5.13. Конденсатор емкостью  $C$  заряжается через сопротивление  $R$  до ЭДС заряжающей батареи  $E$ . Определите энергию батареи, которая переходит в джоулево тепло.

О т в е т.  $Q = CE^2/2$ .

5.14. Для зарядки аккумулятора постоянным током силы  $I$  требуется 8 ч. Какое время потребуется при зарядке от сети переменного тока через двухполупериодный выпрямитель, если эффективное значение тока после выпрямителя также равно  $I$ ?

О т в е т.  $\Delta t = 8,8$  ч.

5.15. Электронагреватель в обычных условиях должна питаться постоянным током силы  $I_0 = 5$  А. Что покажут включенные в цепь нагрева амперметры постоянного тока и переменного тока, если электронагреватель питать от сети переменного тока после однополупериодного выпрямления? Считать, что печь нагревается до номинальной температуры.

О т в е т.  $I_{\sim} = 3,2$  А;  $I_{\sim} = 5$  А.

5.16. В электрическую цепь включены последовательно сопротивление  $R = 0,1$  кОм, индуктивность  $L = 1$  Гн и емкость  $C = 1$  мкФ. Найдите сдвиг фаз между током и напряжением на концах цепи, если частота тока равна  $\nu = 50$  Гц.

О т в е т.  $\varphi = 88^\circ$  (ток опережает по фазе напряжение).

5.17. В цепи тока с частотой 50 Гц находятся реостат и индуктивность  $L = 0,1$  Гн, причем сдвиг фаз между током и напряжением равен  $\varphi = 30^\circ$ . Какую емкость надо включить последовательно в цепь, чтобы устранить сдвиг фазы?

О т в е т.  $C = 100$  мкФ.

5.18. К последовательно соединенным реостату с сопротивлением  $r = 120$  Ом и конденсатору с ем-

костью  $C=30$  мкФ подведено синусоидальное напряжение с амплитудой 311 В и частотой  $\nu=50$  Гц. Вычислить полное сопротивление цепи, действующее значение тока и разность фаз между напряжением и током.

Ответ.  $Z=160$  Ом;  $I_d=1,37$  А;  $\varphi=-41^\circ 30'$ .

5.19. В цепи, показанной на рис. 58, напряжение  $U_{ab}=24$  В. Сопротивления и емкости равны  $r_1=30$  Ом,  $r_2=40$  Ом,  $C_1=5$  мкФ,  $C_2=1$  мкФ. Угловая частота  $\omega=5 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. Чему равно напряжение  $U$ , приложенное к цепи? Определить угол сдвига фаз  $\varphi$  между напряжением  $U_{ab}$  и приложенным напряжением.

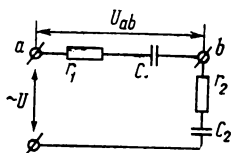


Рис. 58

Ответ.  $U=120$  В,  $\varphi=-20^\circ 35'$ .

5.20. Тонкое медное кольцо вращается вокруг оси, перпендикулярной к однородному магнитному полю  $B$  (рис. 59). За какое время  $\tau$  частота вращения

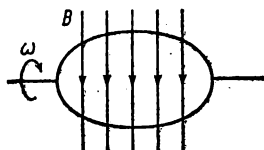


Рис. 59

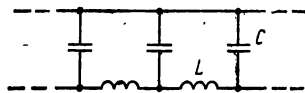


Рис. 60

уменьшится в  $e$  раз? Считать, что энергия расходуется только на джоулево тепло. Проводимость меди равна  $\sigma=6 \cdot 10^7$  См/м, плотность  $\rho=8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, магнитное поле  $B=2 \cdot 10^{-4}$  Вб/м<sup>2</sup>.

Ответ.  $\tau=4\rho/\sigma B^2=1,6$  с.

5.21. Показать, что бесконечная цепь индуктивностей  $L$  и емкостей  $C$  (рис. 60) действует как фильтр низких частот. Выразить граничную частоту  $\omega_{гр}$  через собственную частоту  $\omega_0=1/\sqrt{LC}$ .

Ответ.  $\omega_{гр}=2\omega_0$ .

5.22. Определить индуктивность на единицу длины двухпроводной линии (линии Лехера), если радиусы проводов равны  $r_0$ , расстояние между проводами  $d$  и магнитная проницаемость вещества между проводами  $\mu$ .

Ответ.  $L_0 = \frac{\mu}{\pi} \ln(d/r_0)$ .

5.23. Найти самоиндукцию  $L_0$  единицы длины коаксиальной линии, состоящей из двух коаксиальных цилиндров с радиусами  $r$  и  $R$  ( $r < R$ ), пространство между которыми заполнено веществом с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

Ответ.  $L_0 = \frac{\mu}{2\pi} \ln(R/r)$ .

5.24. Тороидальная катушка из  $N$  витков, внутренний радиус которой равен  $R$ , в поперечном сечении имеет форму квадрата со стороной  $a$ . Найдите коэффициент взаимной индукции катушки и длинного прямолинейного провода, вытянутого вдоль оси симметрии катушки.

Ответ.  $L_{12} = \frac{\mu_0 a N}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right)$ .

5.25. Найдите ток в цепи, показанной на рис. 61. Частота генератора равна  $\omega$ . В начальный момент амплитуда напряжения на зажимах генератора равна  $U_0$ .

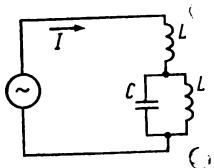


Рис. 61

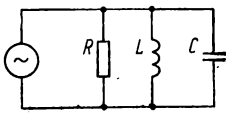


Рис. 62

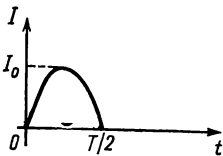


Рис. 63

Ответ.  $I = U_0 \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega(2 - \omega^2 LC)} \sin \omega t$ .

5.26. Найдите амплитуду тока в цепи, показанной на рис. 62, если амплитуда напряжения на зажимах генератора равна  $U_0$ , а частота  $\omega$ .

Ответ.  $I_0 = U_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ .



5.27. В центре длинного соленоида на его оси расположена частица с зарядом  $e$  и массой  $m$ . Определите мгновенное ускорение частицы, если в момент времени  $t=0$  по обмотке соленоида начинают пропускать ток. В начальный момент частица покоилась.

Ответ.  $a=0$ .

5.28. Определите среднее и действующее значения синусоидально изменяющегося напряжения  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ .

Ответ.  $U_{\text{ср}}=0$ ;  $U_g = U_0/\sqrt{2} \approx 0,707 U_0$ .

5.29. Определить среднее и действующее значения тока, получающегося после однополупериодного выпрямления синусоидально изменяющегося тока (рис. 63).

Ответ.  $I_{\text{ср}} = I_0/\pi \approx 0,318 I_0$ ;  $I_g = I_0/2$ .

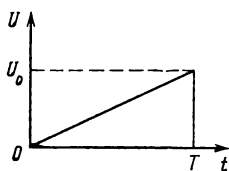


Рис. 64

5.30. Определить среднее и действующее значения пилообразного напряжения, график изменения которого показан на рис. 64.

Ответ.

$U_{\text{ср}} = U_0/2$ ;  $U_g = U_0/\sqrt{3} \approx 0,578 U_0$ .

5.31. К трансформатору, рассмотренному в задаче 3.8.1, приложено напряжение  $U_1=420$  В. Найти величину напряжения  $U_2$  на вторичных зажимах при холостом ходе, пренебрегая падением напряжения в первичной обмотке.

Ответ.  $U_2 = U_1/k = 6300$  В.

5.32. Ко вторичным зажимам трансформатора, рассмотренного в задаче 3.8.1, подключен приемник энергии, имеющий  $\cos \varphi_2 = 0,92$  ( $\varphi_2 > 0$ ), напряжение на вторичных зажимах  $U_2 = 6000$  В, а ток во вторичной цепи  $I_2 = 0,25$  А. Найти напряжение  $U_1$  на первичных зажимах, ток  $I_1$  в первичной обмотке, КПД  $\eta$ , коэффициент мощности  $\cos \varphi_1$ , а также потери мощности  $P_{\text{п}}$  (в стали и обмотках) при нагрузке трансформатора.

Ответ.  $U_1 = 420$  В,  $I_1 = 3,96$  А,  $\cos \varphi_1 = \cos 29^\circ 20' \approx 0,87$ ,  $\eta = 0,95$ ,  $P_{\text{п}} = 70$  Вт.

**5.33.** Однофазный трансформатор с номинальной мощностью 50 кВт имеет потери холостого хода  $P_{x,x}=380$  Вт и КПД при полной нагрузке  $\eta=96,15\%$  с  $\cos \varphi=0.8$ . Определить активное сопротивление первичной и вторичных обмоток, если напряжения на них равны соответственно 6600 и 220 В и если активное сопротивление первичной обмотки равно приведенному сопротивлению вторичной.

О т в е т.  $r_{106}=10,1$  Ом,  $r_{206}=0,011$  Ом.

## Раздел IX

### ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

#### 1. Теоретический материал

Потенциалы Лиенара—Вихерта. Поле равномерно движущегося заряда. Вибратор Герца. Скалярный потенциал диполя, изменяющегося со временем. Векторный потенциал диполя, изменяющегося со временем. Векторный потенциал рамки с током. Дипольное приближение. Электрическое и магнитное поля линейного осциллятора. Ближняя и дальняя (волновая) зоны. Поле излучения диполя в волновой зоне. Энергия, излучаемая диполем. Сопротивление излучения. Излучение рамки с током. Диаграмма направленности излучения. Излучение движущегося заряда при малой скорости. Излучение заряда, движущегося в магнитном поле.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

**2.1.** Запишите выражения для запаздывающих потенциалов.

**2.2.** Почему покоящийся в инерциальной системе координат заряд не излучает?

**2.3.** Почему заряд, равномерно движущийся в инерциальной системе координат, не излучает?

**2.4.** Запишите выражения для электрического и магнитного полей равномерно движущегося заряда.

- 2.5. Как устроен вибратор Герца?
- 2.6. Запишите выражения для скалярного и векторного потенциалов диполя, изменяющегося со временем.
- 2.7. Запишите выражение для векторного потенциала для рамки с током.
- 2.8. В чем состоит дипольное приближение?
- 2.9. Как определяется ближняя зона?
- 2.10. Как определяется волновая зона?
- 2.11. Запишите выражения для электрического и магнитного полей в волновой зоне.
- 2.12. Какую мощность излучает диполь?
- 2.13. Какова диаграмма направленности излучения диполя?
- 2.14. Охарактеризуйте излучение рамки с током.
- 2.15. Какую энергию излучает ускоренный заряд при малой скорости движения?
- 2.16. Какую энергию излучает заряд, когда ускорение перпендикулярно скорости (движение в магнитных полях)?

### 3. Основные задачи и методы их решения

#### а) Классификация

3.1. Расчет электрических и магнитных полей в волновой зоне.

Метод решения. Использование формул для электрического и магнитного полей в волновой зоне.

3.2. Расчет мощности излучения, сопротивления излучения.

Метод решения. Использование формул для мощности излучения и определения сопротивления излучения.

#### б) Примеры

##### *1-й тип задач (3.1)*

3.1.1. К антенне длиной  $l=2$  м подводится синусоидальный ток с амплитудой  $I_0=5$  А и частотой  $\nu=10^6$  Гц. Показать, что такую систему можно рассматривать как электрический диполь, и вычислить

напряженность электрического поля в воздухе на расстоянии  $r=50$  км (в волновой зоне) под углом  $\theta=\pi/2$  к оси диполя.

**Решение.** Длина волны  $\lambda=c/v=300$  м.

Так как  $l \ll \lambda$ , то можно приближенно считать, что  $I=\text{const}$  по длине антенны, т. е. что антенну можно рассматривать как электрический диполь. В волновой (дальней) зоне меридиальная компонента поля

$$E_{\theta} = z_c \cdot \frac{I_0 l \sin \theta}{2\lambda r} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ В/м,}$$

так как  $r=50$  км и  $\lambda=300$  м, то зона будет дальней (волновой).

## II-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Электрическая антенна в виде провода длиной  $l=3$  м питается синусоидальным током с частотой  $\nu=10^6$  Гц и амплитудой  $I_0=10$  А. Вычислить мощность и сопротивление излучения антенны.

**Решение.** Так как длина волны  $\lambda=c/v=300$  м  $\gg l$ , то антенну можно рассматривать как электрический диполь.

Мощность излучения антенны:

$$P = \frac{1}{12\pi} (I_0 l)^2 z_c = 3,95 \text{ Вт.}$$

Сопротивление излучения

$$R = (2/3) \pi z_c (l/\lambda)^2 = 0,079 \text{ Ом.}$$

## 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Покажите, что интеграл от вектора Умова—Пойтинга по сфере вокруг неподвижного заряда равен нулю.

**4.2.** Покажите, что интеграл от вектора Умова—Пойтинга по сфере вокруг заряда, равномерно движущегося в инерциальной системе координат, равен нулю.

**4.3.** Чему равна азимутальная компонента электрического поля переменного диполя в волновой зоне?

4.4. Нарисуйте картину силовых линий электрического и магнитного полей излучающего диполя в волновой зоне.

4.5. Как определяется сопротивление излучения?

4.6. Почему диполь не излучает энергию в направлении своей оси?

4.7. Как убывают с расстоянием электрические и магнитные поля в волновой зоне?

4.8. Как зависит амплитуда электрического и магнитного полей от частоты?

4.9. Чему равно отношение напряженностей электрического и магнитного полей в волновой зоне?

4.10. Как зависят амплитуды и фазы векторов поля диполя от координат  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ ?

4.11. В чем отличие диаграмм направленности излучающего диполя по мощности и по напряженности поля?

4.12. Найдите соотношение между сопротивлением излучения электрического диполя и рамки с током.

### Задачи для самостоятельного решения

5.1. Электрический диполь излучает с мощностью 0,5 Вт. Какова плотность излучения мощности на расстоянии 35,2 км под углом  $45^\circ$  к оси диполя?

Ответ.  $P = 5 \cdot 10^{-11}$  Вт/м<sup>2</sup>.

5.2. По круговой петле, образующей рамку с током, протекает синусоидальный ток с частотой 100 мГц и амплитудой 10 А. Определить среднюю мощность излучения рамки с током, если площадь рамки равна 100 см<sup>2</sup>.

Ответ.  $P = \frac{\mu_0}{12\pi c^3} \omega^4 I_0^2 S^2 = 0,124$  Вт.

5.3. Найти максимальную величину плотности потока излучения в плоскости рамки, описанной в задаче 5.2, на расстоянии 200 м от нее.

Ответ.  $P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^4 I_0^2 S^2}{r^2} = 0,47 \cdot 10^{-5}$  Вт/м<sup>2</sup>.

5.4. Величина каждого из зарядов диполя равна

$q=10^{-4}$  Кл. Плечо диполя равно  $l=3,3 \cdot 10^{-3}$  м, а частота колебаний 100 МГц. Какова мощность излучения диполя?

Ответ.  $P = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 (ql)^2}{c^3} = 0,124$  Вт.

5.5. Заряд  $Q$  равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса  $R$ , которое вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. Какова интенсивность излучения энергии  $I$ ?

Ответ.  $I=0$ .

5.6. Найдите интенсивность излучения частицы массы  $m$ , движущейся по круговой орбите радиуса  $R$  под действием кулоновских сил. Запишите ответ через потенциальную энергию частицы. Заряд силового центра равен  $e$ , заряд частицы  $e$ . При каком условии энергия, излучаемая частицей за период, будет много меньше полной энергии?

Ответ.  $I = \frac{8}{3} \frac{\pi\epsilon_0}{m^2 e^2 c^3} E^4$ .

5.7. Предполагая, что потери энергии частицей за период малы (см. задачу 5.6), определите время «падения» частицы на неподвижный центр.

Ответ.  $\tau = m^2 e^2 c^3 / 8\pi\epsilon_0 |E|^3$ .

## Раздел X

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

#### 1. Теоретический материал

Образование свободных электромагнитных волн. Волновое уравнение. Плоские электромагнитные волны. Свойства электромагнитных волн. Экспериментальные исследования электромагнитных волн. Энергия электромагнитных волн. Вектор Умова—Пойтин-

га. Давление электромагнитных волн. Импульс и масса электромагнитного поля. Распространение электромагнитных волн в свободном пространстве. Направляющие системы. Открытая двухпроводная линия (система Лехера). Коаксиальные линии. Волновод, образованный параллельными идеально проводящими плоскостями. Прямоугольный металлический волновод. Стоячие волны.

## **2. Вопросы по теоретическому материалу**

**2.1.** Почему электрические и магнитные поля могут существовать в свободном пространстве независимо от источников?

**2.2.** Запишите волновое уравнение.

**2.3.** Дайте определение плоской электромагнитной волны.

**2.4.** Нарисуйте пространственное распределение напряженностей электрического и магнитного полей в плоской волне.

**2.5.** Как связаны друг с другом амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в плоской волне?

**2.6.** От чего зависит скорость распространения электромагнитных волн?

**2.7.** Какие Вы знаете приборы для генерации электромагнитных волн?

**2.8.** Какие детекторы электромагнитных волн Вы знаете?

**2.9.** Как определяется поляризация плоских электромагнитных волн?

**2.10.** Какие обнаруживаемые на опыте свойства электромагнитных волн Вы знаете?

**2.11.** Запишите выражение для вектора Умова—Пойтинга.

**2.12.** Какова размерность вектора Умова—Пойтинга?

**2.13.** Каков механизм, обуславливающий давление электромагнитных волн?

**2.14.** Как определяется волновое сопротивление среды?

**2.15.** Какими параметрами характеризуются двухпроводные и коаксиальные линии?

**2.16.** Что такое волновое сопротивление линии?  
**2.17.** Как определяется коэффициент распространения?

**2.18.** Как определяются коэффициенты отражения, бегущей и стоячей волн?

**2.19.** Нарисуйте электрические и магнитные поля в двухпроводной линии в случае бегущей и стоячей волн.

**2.20.** Нарисуйте электрические и магнитные поля в коаксиальной линии в случае бегущей и стоячей волн.

**2.21.** Запишите телеграфные уравнения для двухпроводной и коаксиальной линий.

**2.22.** Что такое волновод?

**2.23.** Почему в прямоугольном волноводе могут распространяться волны, длина волны которых меньше критической?

**2.24.** Как определяются фазовая и групповая скорости?

**2.25.** Почему фазовая скорость может быть больше скорости света?

### **3. Основные типы задач и методы их решения**

#### **а) Классификация**

**3.1.** Задачи на распространение волн в свободном пространстве, определение скорости распространения и энергии волн.

Метод решения. Использование решения волнового уравнения, характеристик среды и определения вектора Умова—Пойтинга.

**3.2.** Задачи на расчет параметров двухпроводной и коаксиальной линий (волновых сопротивлений, коэффициентов распространения, затухания, фазы, отражения, бегущей волны, стоячей волны и т. д.).

Метод решения. Использование определений параметров линии и параметров, характеризующих линию.

**3.3.** Расчет параметров, характеризующих волновод (фазовой и групповой скоростей, критической частоты, длины волны и т. д.).



Метод решения. Использование определений параметров, характеризующих волновод.

## б) Примеры

### 1-й тип задач (3.1)

3.1.1. По прямолинейному проводнику радиуса  $a$  течет постоянный ток с плотностью  $j$ . Показать, что энергия, втекающая в проводник и обусловленная существованием вектора Умова—Пойтинга, на отрезке провода длиной  $l$  равна джоулевым потерям энергии в рассматриваемом объеме проводника. Проводимость проводника равна  $\sigma$ .

Решение. Электрическое поле

$$E = j\sigma^{-1}, \quad (1)$$

магнитное поле

$$H = 2^{-1}ja. \quad (2)$$

Так как электрическое поле направлено вдоль провода (рис. 65), а магнитное перпендикулярно к проводу, то вектор Умова—Пойтинга направлен внутрь провода и равен

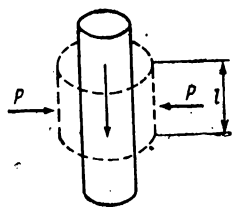


Рис. 65

$$P = 2^{-1}aj^2\sigma^{-1}. \quad (3)$$

Следовательно, поток вектора Умова—Пойтинга через поверхность, охватывающую провод, равен

$$\int \mathbf{P} d\mathbf{S} = -\pi a^2 l \sigma^{-1} j^2. \quad (4)$$

С другой стороны, потери на джоулево тепло определяются интегралом:

$$W = - \int \frac{j^2}{\sigma} dV = - \frac{\pi a^2 l}{\sigma} j^2. \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), приходим к выводу, что потери на джоулево тепло в проводнике компенсируются энергией, втекающей в виде волн в проводник из свободного пространства.

## II-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Воздушная двухпроводная линия из медных проводов характеризуется следующими параметрами: активное сопротивление  $r_0=6,76$  Ом/км, индуктивность  $L_0=1,89 \cdot 10^{-3}$  Гн/км, емкость  $C_0=6,3 \cdot 10^{-9}$  Ф/км, проводимость изоляции между проводами (утечка)  $g_0=5,7 \cdot 10^{-6}$  См/км. Линия предназначена для работы на частоте 20 кГц. Определите волновое сопротивление линии  $Z_{\text{в}}$ , коэффициент распространения  $\gamma$ , коэффициент затухания  $\alpha$  и коэффициент фазы  $\beta$ . Рассчитать длину бегущей волны  $\lambda$  и ее фазовую скорость  $v_{\text{ф}}$ . Решите задачу в приближении  $\omega L_0 \gg r_0$  и  $\omega C_0 \gg g_0$ . Проверьте справедливость этого приближения для рассматриваемой линии.

**Решение.** По определению

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \sqrt{\frac{r_0 + i\omega L_0}{g_0 + i\omega C_0}} \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 546 \text{ Ом},$$

так как  $\omega L_0 \gg r_0$  и  $\omega C_0 \gg g_0$ , и

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + i\omega L_0)(g_0 + i\omega C_0)} = \alpha + i\beta.$$

В том же приближении  $\omega L_0 \gg r_0$  и  $\omega C_0 \gg g_0$  имеем

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{Z_{\text{в}}} + g_0 Z_{\text{в}} \right) = 8,2 \text{ мнп/км},$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} = 435 \text{ мрад/км},$$

$$\lambda = 2\pi/\beta = 14,4 \text{ км},$$

$$v_{\text{ф}} = \omega/\beta = 2,89 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Проверим справедливость использованного приближения:

$$1) \omega L_0 = 2 \cdot 10^2; r_0 = 6,76, \text{ т. е. } \omega L_0 \gg r_0;$$

$$2) \omega C_0 = 10^{-3}; g_0 = 5,7 \cdot 10^{-6}, \text{ т. е. } \omega C_0 \gg g_0.$$

**3.2.2.** Определить коэффициент затухания двухпроводной линии, если мощность генератора составляет 0,1 Вт и на приемнике (на согласованной с линией нагрузке) должна выделяться мощность 100 мкВт. Длина линии равна 10 км.

**Решение.** По определению затухание равно

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{P_{\text{вх}}}{P_{\text{н}}} = \frac{1}{2} \ln 10^3 = 3,45 \text{ неп.}$$

Коэффициент затухания линии должен быть равен

$$\alpha = \frac{a}{l} = \frac{3,45}{10} = 0,345 \text{ неп/км.}$$

3.2.3. Двухпроводная линия из медных проводов предназначена для телефонной связи на частоте  $\nu=100$  кГц. Первичные параметры линии равны:  $r_0=14$  Ом/км,  $L_0=2$  мГн/км,  $g_0=5 \cdot 10^{-6}$  См/км,  $C_0=6,35 \cdot 10^{-9}$  Ф/км. Вычислить индуктивность  $L_1$ , которую надо включить на каждый километр длины, чтобы линия стала неискажающей.

Решение. Линия не будет вносить искажений, если затухание и скорость распространения волн не будут зависеть от частоты. Для этого должно выполняться условие

$$\frac{r_0}{g_0} = \frac{L_0 + L_1}{C_0}, \quad (1)$$

где  $L_1$  — добавочная индуктивность на единицу длины линии. Из (1) находим

$$L_1 = \frac{r_0 C_0}{g_0} - L_0 = 16 \text{ мГн/км.}$$

3.2.4. Линия без потерь, параметры которой  $L_0=1,67$  мкГн/м,  $C_0=6,67$  пФ/м, нагружена на чисто активное сопротивление  $r_n=5 Z_n$ , где  $Z_n$  — волновое сопротивление линии. Определить коэффициенты отражения  $P_n$ , бегущей волны  $K_{б.в.}$ , стоячей волны  $K_{с.в.}$ .

Решение. Волновое сопротивление линии

$$Z_n = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = 500 \text{ Ом.}$$

Сопротивление нагрузки

$$r_n = 5 Z_n = 2500 \text{ Ом.}$$

Коэффициент отражения

$$P_n = \frac{Z_n - Z_n}{Z_n + Z_n} = 2/3.$$

Коэффициент бегущей волны

$$K_{б.в.} = \frac{1 - |P_n|}{1 + |P_n|} = 0,2.$$

Коэффициент стоячей волны

$$K_{с.в.} = 1/K_{б.н.} = 5.$$

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Получите выражения для фазовой и групповой скоростей простейшей волны, распространяющейся в прямоугольном волноводе шириной  $a$  и высотой  $b$  метров.

Решение. Пусть оси координат направлены так, как указано на рис. 66. В простейшем случае имеется только одна компонента вектора напряженности электрического поля  $E_y$ , т. е.  $E_y$  должна иметь вид плоской волны

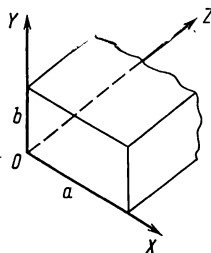


Рис. 66

$$E_y = E_{y0}(x) e^{i(kz - \omega t)} \quad (1)$$

и удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Подставим (1) в волновое уравнение (2), получим

$$\frac{d^2 E_{y0}}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_{y0} = 0. \quad (2')$$

Как известно, простейшее решение уравнения (2') имеет вид

$$E_{y0}(x) = E_{y00} \sin \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)} x. \quad (3)$$

Так как поле  $E$  перпендикулярно поверхности волновода, то при  $x=a$

$$\sin a \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} = 0. \quad (4)$$

Предполагая, что  $\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} \neq 0$ , получим в простейшем случае

$$a\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} = \pi \quad (5)$$

или

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \quad (5')$$

По определению, фазовая скорость равна

$$v_\phi = \omega/k. \quad (6)$$

Используя (5'), получим

$$v_\phi = \sqrt{c^2(k^2 + \pi^2/a^2)/k^2} = c\sqrt{1 + \pi^2/(k^2a^2)}. \quad (6')$$

Аналогично, групповая скорость

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c/\sqrt{1 + \pi^2/(k^2a^2)}. \quad (7)$$

Сравнивая (6') и (7), легко заметить, что

$$v_\phi \cdot v_{gr} = c^2.$$

**3.3.2.** Найдите минимальную частоту для простейшего типа волны, распространяющейся в прямоугольном волноводе шириной  $a$  и высотой  $b$  метров.

Решение. Граничные условия в волноводе (см. задачу 3.3.1) приводят к выражению

$$\omega^2/c^2 = k^2 + \pi^2/a^2. \quad (1)$$

Так как  $k^2 \geq 0$ , то минимальная частота равна

$$\omega_{\min} = \omega_0 = c\pi/a. \quad (2)$$

**3.3.3.** Выразите длину волны в волноводе  $\lambda_v$  через длину волны в свободном пространстве  $\lambda_0$  в случае простейшего типа волн, распространяющихся в прямоугольном волноводе шириной  $a$  и высотой  $b$  метров.

Решение. Фазовая скорость волны (см. задачу 3.3.1), распространяющейся в волноводе, равна

$$v_\phi = c\sqrt{1 + \pi^2/(a^2k^2)}. \quad (1)$$

Длина бегущей волны в свободном пространстве

$$\lambda_0 = 2\pi c/\omega, \quad (2)$$

а в волноводе

$$\lambda_v = 2\pi v_\phi/\omega. \quad (3)$$

Кроме того, длина волны в волноводе также равна

$$\lambda_{\text{в}} = 2\pi/k. \quad (4)$$

Используя (1) — (4), окончательно находим

$$\lambda_{\text{в}} = \lambda_0 / \sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}.$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Укажите метод решения волнового уравнения.

4.2. К конденсатору приложено синусоидальное напряжение. Нарисуйте направление потока энергии в окружающем конденсатор пространстве в моменты времени, кратные четверти периода.

4.3. Запишите телеграфные уравнения и их решения и поясните их физический смысл.

4.4. При каких условиях применим метод телеграфных уравнений для расчета длинных линий?

4.5. С какой скоростью распространяется энергия вдоль двухпроводной линии?

4.6. Сформулируйте условия образования стоячей волны в двухпроводной линии.

4.7. Выведите телеграфные уравнения.

4.8. Как определяется линия без потерь?

4.9. С какой скоростью распространяется энергия в линии без потерь?

4.10. Рассмотрите явления в линии, когда она замкнута на волновое сопротивление линии, разомкнута, замкнута накоротко.

4.11. Сформулируйте граничные условия для электрического и магнитного полей в волноводе с идеально проводящими стенками.

4.12. Чему равно произведение фазовой скорости на групповую?

4.13. Нарисуйте силовые линии электрического и магнитного полей в прямоугольном волноводе в случае простейшего типа волны.

4.14. Почему в случае прямоугольного волновода критическая длина волны зависит только от ширины волновода и не зависит от его высоты?

4.15. Какие типы волн могут реализоваться в прямоугольном волноводе?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Для воздушной двухпроводной линии, описанной в задаче 3.2.1, рассчитать волновое сопротивление линии  $Z_{\text{в}}$ , коэффициент затухания  $\alpha$ , коэффициент фазы  $\beta$ , длину бегущей волны  $\lambda$  и ее фазовую скорость  $v_{\text{ф}}$ , пользуясь точными формулами.

О т в е т.  $Z_{\text{в}}=550 e^{-i\varphi}$ , где  $\varphi=40'$ ;  $\alpha=7,6$  мнп/км;  $\beta=435$  мрад/км;  $\lambda=14,4$  км;  $v_{\text{ф}}=2,89 \cdot 10^8$  м/с.

5.2. Для воздушной двухпроводной линии, описанной в задаче 3.2.1, определить отношение  $K$  мощности на согласованной нагрузке ( $Z_{\text{н}}=Z_{\text{в}}$ ) к мощности на входе, если длина линии 132 км.

О т в е т.  $K=0,135$ .

5.3. Мощность, необходимая для нормальной работы телефонного аппарата, составляет 1 мкВт, а мощность передающего устройства — 1 Вт. Определить максимальную длину двухпроводной линии, коэффициент затухания которой равен  $\alpha=13,6$  мнп/км. Сопротивление телефонного аппарата согласовано с линией.

О т в е т.  $l=510$  км.

5.4. Неискажающая линия, параметры которой описаны в задаче 3.2.3 (индуктивность линии  $L=L_0+L_1=18$  мГн/км), имеет длину 100 км и нагружена на сопротивление, равное волновому. К началу линии подведено напряжение  $U_1=10$  В. Чему равны напряжение и мощность, выделяемая на нагрузке?

О т в е т.  $U_2=4,33$  В;  $P_2=11,2$  мВт.

5.5. Определить минимальное напряжение (напряжение в узловой точке) в линии без потерь, описанной в задаче 3.2.3, если напряжение на нагрузке равно  $U_{\text{н}}=10$  В.

О т в е т.  $U_{\text{min}}=2$  В.

5.6. Линия без потерь имеет параметры  $L_0=2$  мкГн/м и  $C_0=5,55$  пФ/м. В конце линии включена индуктивность  $L=10$  мкГн. Рассчитать коэффици-

енты отражения  $P_{\text{н}}$ , бегущей волны  $K_{\text{б.в.}}$ , стоячей волны  $K_{\text{с.в.}}$ . Какие волны установятся в линии?

$$\text{Ответ. } P_{\text{н}} = \frac{i\omega L - \sqrt{L_0/C_0}}{i\omega L + \sqrt{L_0/C_0}} = 1 - 0,1i, \quad K_{\text{б.в.}} \approx 0,$$

$K_{\text{с.в.}}$  — очень велик. В линии установятся стоячие волны.

5.7. Воздух начинает ионизоваться при напряженности электрического поля  $E \approx 30$  кВ/см. При какой плотности потока энергии плоских электромагнитных волн достаточно малой частоты в воздухе может наступить ионизация?

$$\text{Ответ. } P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Вт/м}^2.$$

5.8. Найдите граничную частоту для прямоугольного волновода шириной 4 см.

$$\text{Ответ. } \omega_0 = c \pi / a = 2,355 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

5.9. Выразите фазовую и групповую скорости волн в прямоугольном волноводе через граничную частоту  $\omega_0$ .

$$\text{Ответ. } v_{\text{ф}} = c / \sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}; \quad v_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}.$$

5.10. Длина волны в свободном пространстве равна  $\lambda_0 = 3$  см. Определите длину простейшей волны в прямоугольном волноводе шириной  $a = 2,5$  см.

$$\text{[ Ответ. } \lambda = \lambda_0 / \sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2} = \frac{5}{4} \lambda_0 = 3,75 \text{ см.}$$

5.11. От генератора сигналов к приемнику передается некоторая информация по прямоугольному волноводу шириной  $a = 2$  см. С каким «опозданием»  $\Delta\tau$  будет поступать информация в приемник, если расстояние от генератора до приемника  $l = 9$  м и информация передается на несущей частоте  $\omega = 3,768 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ? Считать, что в волноводе возбуждается простейший тип волн.

$$\text{Ответ. } \Delta\tau = (l/c) / \sqrt{1 - (c\pi/a\omega)^2} = 50 \text{ нс.}$$

5.12. Во сколько раз фазовая скорость простей-



ших волн в прямоугольном волноводе превышает скорость света, если ширина волновода  $a=1$  см, а частота волн  $\omega=1,036 \cdot 10^{11}$  с<sup>-1</sup>

Ответ.  $v_{ph} = 1/\sqrt{1 - (c\pi/a\omega)^2} = 2,25$ .

5.13. Плоская поляризованная электромагнитная волна с круговой частотой  $\omega=10^8$  с<sup>-1</sup> падает с ребра на рамку из проводника, причем вектор  $H$  волны направлен перпендикулярно плоскости рамки. Линейные размеры рамки малы в сравнении с длиной волны. Площадь рамки  $S=100$  см<sup>2</sup>, средняя плотность потока энергии в волне  $\langle P \rangle = 1$  Вт/м<sup>2</sup>. Найти максимальную ЭДС индукции, наводимую в контуре.

Ответ.  $\mathcal{E}_{\max} = \sqrt{2 \langle P \rangle \mu_0 (\epsilon_0 \mu_0)^{1/4}} S \omega = 9 \cdot 10^{-3}$  В.

## Раздел XI

### ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ

#### 1. Теоретический материал

Электрические токи в вакууме. Электронные лампы. Ограничение тока в лампах пространственным зарядом. Проводимость газов. Несамостоятельная проводимость газов. Способы ионизации газов. Ионизация электронным ударом. Несамостоятельные и самостоятельные разряды. Электронные лавины. Возникновение самостоятельного разряда. Тлеющий разряд. Искровой разряд. Коронный разряд. Дуговой разряд. Плазма. Проводимость малоплотной высокотемпературной плазмы. Тиратрон. Электрический ток в электролитах. Законы электролиза Фарадея. Электропроводность электролитов. Числа переноса. Подвижность ионов. Электропроводность кристаллических твердых тел. Элементы зонной теории. Уровень Ферми. Проводники /металлы/, полупроводники, изоляторы. Время релаксации и длина свободного пробега электронов в металле. Собственная проводимость

полупроводников. Примесная проводимость полупроводников. Электронная и дырочная проводимость. Проводимость изоляторов.

## **2. Вопросы по теоретическому материалу**

2.1. Как устроен диод?

2.2. Как образуется пространственный заряд?

2.3. В условиях ограничения тока пространственным зарядом каково распределение потенциала между катодом и анодом?

2.4. Чем обусловлена несамостоятельная проводимость газов?

2.5. Как определяются первый и второй ( $\alpha$  и  $\gamma$ ) коэффициенты Таунсенда?

2.6. Запишите условие пробоя в газе.

2.7. Каков механизм электропроводности в плазме?

2.8. Как определяется дебаевский радиус?

2.9. Что такое электронная и ионная температуры? Когда они равны?

2.10. Как устроен и работает тиратрон?

2.11. Сформулируйте законы электролиза Фарадея.

2.12. Чему равно число Фарадея?

2.13. Сформулируйте закон Оствальда.

2.14. Как определяется подвижность ионов?

2.15. Запишите выражение для удельной электропроводности электролитов.

2.16. Каков механизм расщепления уровней в твердом теле?

2.17. Как определяются валентная зона, зона проводимости и внутренние зоны?

2.18. Как экспериментально определяется природа носителей тока в металле?

2.19. Почему существует электрическое сопротивление?

2.20. Почему сопротивление металлов возрастает с увеличением температуры?

2.21. Как классическая электронная теория объясняет закон Ома?

2.22. Каково объяснение закона Джоуля—Ленца?

2.23. В чем состоит явление Холла?

**2.24.** Как определяются концентрация и подвижность электронов в металлах?

**2.25.** Дайте определение собственной проводимости полупроводников.

**2.26.** Почему собственная проводимость при больших температурах увеличивается?

**2.27.** Что такое дырка?

**2.28.** Что такое донорная примесь?

**2.29.** Как определяется акцепторная примесь?

**2.30.** Почему добавление примесей (легирование) увеличивает проводимость полупроводников?

**2.31.** Дайте объяснение явлению фотопроводимости.

**2.32.** Как объясняется проводимость изоляторов?

### **3. Основные типы задач и методы их решения**

#### **а) Классификация**

**3.1.** Задачи на расчет полей, потенциалов, токов, плотностей пространственного заряда и т. д. в вакуумных системах.

**Метод решения.** Использование законов и определений тока, потенциала и т. д.

**3.2.** Задачи на расчет несамостоятельной проводимости газов и пробоя газов.

**Метод решения.** Использование определений тока в газах и условия пробоя.

**3.3.** Задачи на расчет проводимости плазмы.

**Метод решения.** Использование формулы для проводимости плазмы.

**3.4.** Задачи на расчет проводимости электролитов.

**Метод решения.** Использование электропроводности электролитов и постоянных, характеризующих электролит.

**3.5.** Задачи на расчет электропроводности металлов.

**Метод решения.** Использование результатов классической электронной теории, определений, постоянных, характеризующих проводник, элементов зонной теории.

**3.6.** Задачи на расчет собственной электропроводности полупроводников.

**Метод решения.** Использование элементов

зонной теории, определений электропроводности и постоянных, характеризующих полупроводник.

3.7. Задачи на расчет примесной электропроводности и фотопроводимости полупроводников.

Метод решения. Использование элементов зонной теории, определений и атомных постоянных вещества.

#### а) Примеры

##### *I-й тип задач (3.1)*

3.1.1. Определите распределение потенциала между катодом и анодом в плоскопараллельном диоде в случае, когда ток ограничен пространственным зарядом. Напряжение на катоде равно 0, на аноде —  $U_a$ . Расстояние между катодом и анодом равно  $d$ . Скорость электронов у катода считать равной нулю.

Решение. Уравнение Пуассона в случае одномерного распределения потенциала (рис. 67) имеет вид

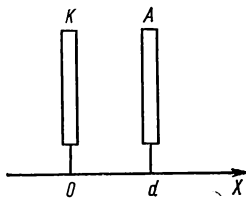


Рис. 67

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\rho/\epsilon_0. \quad (1)$$

Плотность заряда

$$\rho = -ne, \quad (2)$$

где  $n$  — плотность электронов,  $e$  — модуль заряда электрона.

Предполагая, что  $d \ll \sqrt{S}$  (где  $S$  — площадь пластин), плотность заряда можно выразить через плотность тока  $j$ :

$$j = nev, \quad (3)$$

где  $v$  (скорость электронов) определяется согласно закону сохранения энергии:

$$2^{-1}mv^2 = eU. \quad (4)$$

Используя (2) — (4), перепишем (1) в виде

$$\frac{d^2U}{dx^2} = CU^{-1/2}, \quad (1')$$

где

$$C = (j/\varepsilon_0) \cdot (m/2e)^{1/2}. \quad (1')$$

Умножая (1') слева и справа на  $dU/dx$ , придем к уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 = 2C \frac{d}{dx} U^{1/2}. \quad (1'')$$

Интегрируя (1''), получим

$$(dU/dx)^2 = 4CU^{1/2} + C_1. \quad (5)$$

Так как ток в диоде ограничен пространственным зарядом, то электрическое поле у катода равно нулю, т. е.  $(dU/dx)|_{x=0} = 0$ .

Поскольку и сам потенциал у катода равен 0, то постоянная  $C_1$  в (5) должна равняться нулю, т. е.

$$dU/dx = 2\sqrt{C}U^{1/4}. \quad (5')$$

Интегрируя (5'), получим

$$(4/3)U^{3/4} = 2\sqrt{C}x + C_2. \quad (6)$$

Поскольку  $U=0$  у катода, то  $C_2=0$ .

Так как  $U=U_a$  на аноде, то окончательно находим из (6)

$$U = U_a (x/d)^{4/3}.$$

## II-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Для аргона при некотором давлении коэффициенты Таунсенда равны  $\alpha=150 \text{ м}^{-1}$  и  $\gamma=2$ . Определите максимальное расстояние между электродами в камере, наполненной аргоном, при котором можно избежать электрического пробоя.

**Решение.** Из условия пробоя  $\gamma[\exp(\alpha d) - 1] \geq 1$  находим

$$d \geq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} = 2,7 \text{ мм}.$$

**3.2.2.** Рассчитайте потенциал зажигания в наполненной азотом разрядной трубке, два плоскопараллельных электрода которой разделены промежутком длиной 4 мм. Отношение степени ионизации к дав-

лению равно  $\alpha/p=60$  пар ионов/мм рт. ст.·м, а отношение напряженности электрического поля к давлению  $E/p=10^5$  В/м·мм рт. ст. Коэффициент вторичной эмиссии  $\gamma=0,07$ . Найдите напряженность электрического поля и давление в трубке.

**Решение.** Потенциал зажигания равен

$$U_S = Ed. \quad (1)$$

Используя условие пробоя (см. задачу 3.2.1) и определение коэффициента  $\alpha$ , найдем

$$U_S = \frac{E}{p} pd = \frac{E}{p} \frac{\ln(1/\gamma)}{f_1(E/p)} = \frac{E}{p} \frac{\ln(1/\gamma)}{\alpha/p} = 443 \text{ В.}$$

Напряженность электрического поля

$$E = U_S/d = 10^5 \text{ В/м.}$$

Давление в трубке

$$p = E/(E/p) = 1 \text{ мм рт. ст.}$$

### III-й тип задач (3.3)

**3.3.1.** Определите температуру, при которой полностью ионизованная водородная плазма обладает проводимостью, равной проводимости меди  $\sigma = 6 \cdot 10^7$  См/м.

**Решение.** Согласно формуле Спитцера для проводимости плазмы

$$\sigma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} \frac{T_e^{3/2}}{\Lambda}, \quad (1)$$

где  $T_e$  — температура электронов,  $\Lambda$  — кулоновский логарифм, определяемый столкновительными процессами в плазме, причем  $\Lambda \approx 15$ .

Из формулы (1) непосредственно находим

$$T_e = \left( \frac{3\sigma m \Lambda}{2e^2} \right)^{2/3} = 2 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

### IV-й тип задач (3.4)

**3.4.1.** Определить концентрацию ионов натрия в водном растворе поваренной соли малой concentra-

ции, если ток через плоские электроды, расположенные на расстоянии  $d=10$  см, равен  $I=1,8$  А. Напряжение между электродами равно  $U_0=20$  В, а подвижности ионов равны:  $b_{Na+}=0,45 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/(с·В);  $b_{Cl-}=0,68 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/(с·В). Площадь пластин равна  $S=10^3$  см<sup>2</sup>.

Решение. По определению плотность тока в электролите равна

$$j = ne\alpha(b_+ + b_-)E. \quad (1)$$

С другой стороны, по условию задачи

$$j = I/S. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим, полагая  $\alpha=1$  для раствора слабой концентрации

$$n = \frac{I \cdot d}{e(b_+ + b_-)U_0 S} = 5 \cdot 10^{17} \frac{\text{ионов}}{\text{м}^3}.$$

*V-й тип задач (3.5)*

**3.5.1.** На каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Какова средняя скорость электронов проводимости  $v$ , если через медный провод диаметром  $d=0,2$  мм течет ток  $I=10$  А?

Решение. Плотность тока по определению равна

$$j = I/S. \quad (1)$$

С другой стороны, плотность тока выражается через концентрацию носителей тока  $n$  и их скорость  $v$ :

$$j = nev. \quad (2)$$

Концентрация носителей по условию равна числу атомов в единице объема, т. е.

$$n = (A/\rho)N_0, \quad (3)$$

где  $A$  — атомный вес и  $\rho$  — плотность меди и  $N_0$  — число Авогадро.

Используя (1)—(3), окончательно находим

$$v = I\rho / (eSAn_0) = 2,72 \text{ см/с.}$$

## VI-й тип задач (3.6)

**3.6.1.** Градиент потенциала в образце кремния собственной проводимости составляет  $E=400$  В/м, а подвижности электронов и дырок равны соответственно  $\mu_n=0,12$  м<sup>2</sup>/(В·с) и  $\mu_p=0,025$  м<sup>2</sup>/(В·с). Определите для этого образца скорости дрейфа электронов  $u_n$  и дырок  $u_p$ , удельное сопротивление кремния собственной проводимости  $\rho_i$ , если концентрация собственных носителей тока равна  $n_i=2,5 \cdot 10^{16}$  м<sup>-3</sup>, и полный дрейфовый ток через площадь поперечного сечения образца  $S=3 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>.

Решение. По определению скорости дрейфа электронов и дырок равны соответственно:

$$u_n = \mu_n E = 48 \text{ м/с}, \quad u_p = \mu_p E = 10 \text{ м/с}.$$

Удельное сопротивление кремния собственной проводимости по определению равно

$$\rho_i = 1/\sigma_i = 1/n_i e (\mu_n + \mu_p) = 1,73 \cdot 10^3 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Полный дрейфовый ток по определению равен

$$I = n_i e (u_n + u_p) S = 0,70 \text{ мкА}.$$

## VII-й тип задач (3.7)

**3.7.1.** Образец легированного кремния  $p$ -типа имеет следующие линейные размеры: длина  $l=5$  мм, ширина  $b=2$  мм и толщина  $a=1$  мм. Вычислите концентрацию примеси в образце и сопротивление образца, если на  $7,1 \cdot 10^7$  атомов кремния приходится один атом акцептора. Определите электронную и дырочную проводимости и их отношение. Подвижность электронов равна  $\mu_n=0,12$  м<sup>2</sup>/(В·с), а дырок —  $\mu_p=0,025$  м<sup>2</sup>/(В·с); концентрация собственных носителей равна  $n_i=2,5 \cdot 10^{16}$  м<sup>-3</sup>.

Решение. Чистый кристаллический кремний содержит в 1 м<sup>3</sup>  $n = (A/\rho) N_0$  атомов, где  $A$  — атомный вес,  $\rho$  — плотность и  $N_0$  — число Авогадро. Для кремния имеем

$$n = 4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$



По условию задачи концентрация акцепторов и, следовательно, дырок равна

$$P_p = n/7,1 \cdot 10^7 = 6,24 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

По определению концентрация электронов в  $p$ -полупроводнике

$$n_p = n_i^2 / P_p = 1 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}.$$

По определению электронная проводимость

$$\sigma_n = n_p e \mu_n = 1,92 \cdot 10^{-9} \text{ См/м},$$

а дырочная проводимость

$$\sigma_p = P_p e \mu_p = 25 \text{ См/м}.$$

Отношение дырочной проводимости к электронной

$$c = \sigma_p / \sigma_n = 1,3 \cdot 10^{10}.$$

Сопротивление образца

$$R = l / ab \sigma_p = 100 \text{ Ом}.$$

**3.7.2.** Ширина запрещенной зоны в кремнии равна  $\Delta E = 1,1$  эВ. При комнатной температуре на чистый образец кремния действует излучение с длиной волны  $\lambda = 1$  мкм. Увеличится ли при этом проводимость кремния?

**Решение.** Энергия фотонов

$$\epsilon = h\nu = hc/\lambda = 1,24 \text{ эВ}.$$

Так как ширина запрещенной зоны  $\Delta E = 1,1$  эВ, то  $\epsilon > \Delta E$ , т. е. вероятность нахождения электронов в зоне проводимости возрастает и поэтому проводимость увеличится.

#### 4. Контрольные вопросы

**4.1.** Чему равна поверхностная плотность электрического заряда на катоде в случае ограничения тока через диод пространственным зарядом?

**4.2.** Чему равна поверхностная плотность электрического заряда на аноде в случае ограничения тока через диод пространственным зарядом?

**4.3.** Выведите условие пробоя газов.

4.4. Как зависит электропроводность плазмы от температуры?

4.5. Получите формулу для кулоновского логарифма.

4.6. Как изменяется подвижность ионов с ростом температуры?

4.7. Рассмотрите механическую модель, поясняющую расщепление уровней в твердом теле.

4.8. Почему внутренние зоны заполнены полностью?

4.9. Почему электроны в полностью заполненной зоне не участвуют в процессе электропроводности, хотя они и не принадлежат какому-то фиксированному иону решетки?

4.10. Почему электросопротивление металлов растет с ростом температуры?

4.11. Почему подвижность электронов в металлах убывает с ростом температуры?

4.12. Почему электросопротивление полупроводников, как правило, падает с ростом температуры (в области высоких температур)?

4.13. Как объяснить разброс характеристик различных образцов одного и того же полупроводника?

4.14. Как можно измерить концентрацию и знак заряда носителей тока в полупроводнике?

4.15. Как можно различить электронную и ионную проводимости?

4.16. От каких факторов зависит электропроводность вещества?

4.17. От каких факторов зависит концентрация носителей тока в различных веществах?

4.18. Что понимают под подвижностью носителей тока и чем она определяется?

4.19. Как можно объяснить положительный знак заряда носителей тока в некоторых полупроводниках?

4.20. Что понимают под «дырочной» проводимостью?

4.21. Как должен двигаться электрон в идеальной периодической кристаллической решетке согласно Блоху?

4.22. Чем определяется длина «свободного» пробега электрона в реальной кристаллической решетке?

4.23. Можно ли считать, что в кристалле какой-то определенный электрон «принадлежит» какому-либо определенному атому?

4.24. Если к кристаллу приложить электрическое поле, то все ли электроны примут участие в электропроводности?

4.25. Нарисуйте примерный график потенциальной энергии электрона в идеальной кристаллической решетке.

4.26. Как объяснить образование разрешенных и запрещенных зон энергий в кристалле?

4.27. Почему в случае электронов, расположенных на внутренней оболочке атомов, разрешенные зоны очень узкие, в то время как зоны энергий для валентных электронов достаточно широкие?

4.28. Почему нижние энергетические зоны заполнены полностью, в то время как верхние (валентные и возбужденные) могут быть заполненными лишь частично или даже быть совсем пустыми?

4.29. Используя принцип Паули, покажите, что электроны из низших заполненных зон не могут участвовать в процессе электропроводности, несмотря на то, что согласно Блоху, они могут в некотором смысле беспрепятственно перемещаться по идеальному кристаллу.

4.30. Когда электрон участвует в процессе электропроводности, он движется под действием электрического поля. Как изменяется при этом энергия электрона? Как это изменение энергии описать на языке квантовой механики?

4.31. Показать, что в случае щелочных металлов валентная зона заполнена только наполовину.

4.32. Как определяются изоляторы с точки зрения теории зон?

4.33. Почему двухвалентные металлы типа магния на самом деле проводники, а не изоляторы?

4.34. Как определяются полупроводники с точки зрения теории зон?

4.35. Как теория зон объясняет быстрый рост проводимости полупроводников с температурой?

4.36. Что понимают под «дыркой» при описании проводимости полупроводников?

4.37. Почему пустые зоны называют зонами «проводимости»?

4.38. Почему наличие примесей или механические дефекты кристалла влияют на проводимость полупроводников?

4.39. Какие примеси называют донорными (или примесями  $n$ -типа)?

4.40. Какие примеси называют акцепторными (или примесями  $p$ -типа)?

4.41. Что понимают под собственной проводимостью полупроводников?

4.42. Что понимают под электронной проводимостью (проводимостью  $n$ -типа) полупроводников?

4.43. Что понимают под дырочной проводимостью (проводимостью  $p$ -типа) полупроводников?

4.44. Почему в области невысоких температур электросопротивление примесных полупроводников увеличивается с ростом температуры?

4.45. Почему трудно наблюдать собственную проводимость полупроводников?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. В случае плоскопараллельного диода, описанного в задаче 3.1.1, найдите время пролета электронов от катода к аноду. Определите также время пролета в случае отсутствия пространственного заряда при том же потенциале на аноде.

$$\text{Ответ. } \tau = 3 \sqrt{\frac{m}{2eU_a}} d; \tau_{\text{бсз пр.з}} = 2d/\sqrt{2eU_a/m}; \\ \tau/\tau_{\text{бсз пр.з}} = 1,5.$$

5.2. В случае плоскопараллельного диода, описанного в задаче 3.1.1, рассчитайте плотность объемного заряда  $\rho(x)$  как функцию расстояния до катода.

$$\text{Ответ. } \rho(x) = -\frac{4}{9} \varepsilon_0 U_a \left(\frac{d}{x}\right)^{2/3} / d^2.$$

5.3. Напряжение на аноде диода, описанного в задаче 3.1.1, равно  $U_a = 200$  В. Определите плотность

тока через диод, если расстояние между катодом и анодом равно  $d=5 \cdot 10^{-3}$  м.

$$\text{Ответ. } j = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} U_a^{3/2} / d^2 = 2,6 \cdot 10^2 \text{ А/м}^2.$$

5.4. Напряжение на аноде диода, описанного в задаче 3.1.1, равно  $U_a=100$  В, а расстояние между катодом и анодом равно 1 см. Вычислите плотность пространственного заряда на расстоянии 0,5 см от катода.

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } \rho(d/2) &= -\frac{4}{9} \epsilon_0 U_a \cdot 2^{2/3} / d^2 = \\ &= -6,25 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^3. \end{aligned}$$

5.5. Найдите скорость электронов в точке, равноудаленной от катода и анода в диоде (см. задачу 3.1.1).

$$\text{Ответ. } v = \sqrt{\frac{2e}{m} U_a} \cdot 2^{-2/3} = 3,7 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

5.6. Электронная лампа и  $LC$ -цепь используются обычным способом как радиочастотный генератор. Каков порядок величины верхней граничной частоты такого генератора, если к электродам приложена разность потенциалов  $U_a=200$  В, а расстояние между электродами равно  $l=1$  мм?

$$\text{Ответ. } \omega \sim \frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{2e}{m} U_a} / l = 10^{10} \cdot \text{с}^{-1}.$$

5.7. В разрядной трубке с межэлектродным расстоянием  $d=5$  мм происходит пробой. Коэффициент вторичной эмиссии  $\gamma=0,018$ . Сколько электронов создает первичный электрон на длине 1 м?

$$\text{Ответ. } \alpha = \frac{1}{d} \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} = 807 \text{ м}^{-1}.$$

5.8. Определите напряженность электрического поля и длину межэлектродного расстояния в разрядной трубке, наполненной аргоном, если пробой наступает при  $U_s=400$  В. Коэффициенты Таунсенда равны  $\alpha=100$  пар ионов/м<sup>2</sup>;  $\gamma=0,07$ .

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } d &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\gamma}{\gamma} \right) = 4 \text{ мм}, \\ E &= U_s/d = 10^5 \text{ В/м}. \end{aligned}$$

5.9. Напряженность электрического поля в разрядной трубке, наполненной аргоном до давления  $p=6,5$  мм рт. ст., равна 26 кВ/м. Рассчитайте потенциал зажигания и число пар ионов и электронов в разрядной трубке, образуемых первичным электроном на пути в 1 м, если отношение степени ионизации к давлению равно  $\alpha/p=100$  пар ионов/мм рт. ст. м, а коэффициент вторичной эмиссии  $\gamma=0,07$ .

$$\text{Ответ. } U_s = \frac{E}{p} \frac{\ln(1/\gamma)}{\alpha/p} = 104 \text{ В};$$

$$\alpha = p \cdot (\alpha/p) = 650 \frac{\text{пар ионов}}{\text{м}}.$$

5.10. Плотность электронов проводимости в меди равна приблизительно  $n=8,5 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>. Определить среднюю скорость дрейфа электронов проводимости при плотности тока  $j=10$  А/мм<sup>2</sup>.

$$\text{Ответ. } v_{\text{др}} = j/eN = 0,074 \text{ см/с.}$$

5.11. Определить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  электронов проводимости в меди и сравнить ее с постоянной решетки меди  $a$ . Как объясняется различие между  $\lambda$  и  $a$ ?

$$\text{Ответ. } \lambda/a \sim 10^2.$$

5.12. Какое количество электронов проходило через баллистический гальванометр в опытах Толмена и Стюарта, если линейная скорость катушки достигала  $v_0=300$  м/с, общая длина проводов обмотки составляла  $l=500$  м, а сопротивление цепи  $R=5$  кОм.

$$\text{Ответ. } n = \frac{m}{e^2} \frac{v_0 l}{R} = 1 \cdot 10^9.$$

5.13. Проводимость меди при комнатной температуре равна  $\sigma=6 \cdot 10^7$  См/м. Предполагая, что каждый атом меди в твердом металлическом состоянии отдает в зону проводимости один валентный электрон, определите время релаксации электронов в меди.

$$\text{Ответ. } \tau = \frac{\sigma m}{ne^2} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ с,}$$

где  $n$  — плотность электронов,  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона.

5.14. Определите скорость электронов в меди при комнатной температуре, если энергия Ферми для меди равна  $E_F = 7,04$  эВ.

Ответ.  $v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = 1,6 \cdot 10^6$  м/с.

5.15. Определите среднюю длину свободного пробега электронов в меди при комнатной температуре и сравните ее с постоянной решетки.

Ответ.  $\lambda = \tau u = \frac{\sigma m}{ne^2} \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = 3 \cdot 10^{-8}$  м,

постоянная решетки  $a_{Cu} = 2,55 \cdot 10^{-10}$  м,  $\lambda/a_{Cu} = 100$ .

5.16. Определите подвижность электронов в меди при комнатной температуре.

Ответ.  $\mu = e\tau/m = \sigma/ne = 3,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/(В·с).

5.17. Определите среднюю длину свободного пробега электронов в меди при комнатной температуре согласно элементарной кинетической теории. Сравните с ответом задачи 5.15.

Ответ.  $\lambda_{кин} = 1/n\pi R^2 = 4 \cdot 10^{-10}$  м.

5.18. Ширина запрещенной зоны в германии равна  $\Delta E = 0,7$  эВ. Увеличится ли проводимость чистого образца германия при комнатной температуре при облучении его излучением с длиной волны  $\lambda = 3$  мкм.

Ответ. Не увеличится.

5.19. Удельное сопротивление чистого образца кремния при температуре 300 К равно  $\rho = 1000$  Ом·м. Определите концентрацию собственных носителей, если подвижности электронов и дырок равны соответственно  $\mu_n = 0,12$  м<sup>2</sup>/(В·с), а  $\mu_p = 0,025$  м<sup>2</sup>/(В·с).

Ответ.

$$n_i = 1/[e\rho(\mu_p + \mu_n)] = 4,31 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

5.20. Определите проводимость германия при 300 К, легированного элементом III группы, если на каждые  $10^7$  атомов германия приходится один примесный атом акцептора. Подвижность электронов

при этой температуре равна  $\mu_n = 0,4 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , а дырок —  $\mu_p = 0,2 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

Ответ.  $\sigma_p = e \left( P_p \mu_p + \frac{n_i^2}{P_p} \mu_n \right) = 144 \text{ См/м}$ .

5.21. Теоретическое значение удельного сопротивления чистого кремния при комнатной температуре равно  $2 \cdot 10^3 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ , а концентрация электронов проводимости составляет  $n_i = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$ . Чему равно при этой температуре удельное сопротивление кремния  $n$ -типа с концентрацией доноров  $n_n = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ? Подвижность электронов в три раза больше подвижности дырок.

Ответ.  $\rho = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

5.22. Слиток германия получен сплавлением 100 г германия и  $3,22 \cdot 10^{-6} \text{ г}$  сурьмы. Предполагая, что сурьма распределена в образце равномерно, определите концентрацию атомов сурьмы.

Ответ.  $n_c = 8,7 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

5.23. Предполагая, что избыточные электроны, внесенные атомами сурьмы (см. задачу 5.22), полностью возбуждены при комнатной температуре, рассчитайте удельную проводимость слитка, если подвижность избыточных электронов равна  $3600 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

Ответ.  $\sigma = 50 \text{ См/м}$ .

5.24. Рассчитайте сопротивление бруска германия сечением  $1 \text{ мм}^2$  и длиной  $1 \text{ см}$ , приготовленного из образца, описанного в задаче 5.22.

Ответ.  $R = 200 \text{ Ом}$ .

5.25. Слиток германия получен сплавлением 100 г германия и  $0,78 \cdot 10^{-6} \text{ г}$  галлия. Предполагая, что примесь атомов галлия распределена по слитку равномерно, определите концентрацию атомов галлия.

Ответ.  $n_2 = 3,68 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

5.26. Определите проводимость сплава германия с галлием (см. задачу 5.25), считая, что все вакансии возбуждены, и принимая для подвижности дырок  $\mu_p = 1700 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$

Ответ.  $\sigma = 10 \text{ См/м}$ .



## Раздел XII

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

#### 1. Теоретический материал

Формулы преобразования четырехмерных векторов. Формулы преобразования потенциалов электромагнитного поля. Преобразования заряда и тока. Преобразование тензоров. Формулы преобразования векторов электромагнитного поля. Инварианты преобразований. Условия, при которых электромагнитное поле подходящим выбором системы отсчета может быть сведено либо к чисто электрическому, либо к чисто магнитному полю. Относительный характер разделения электромагнитного поля на электрическое и магнитное. Инвариантность плоской волны. Сила Лоренца как результат относительного характера разделения электромагнитного поля на электрическую и магнитную части. Характеристика электрического и магнитного полей равномерно движущегося точечного заряда.

#### 2. Вопросы по теоретическому материалу

2.1. Дайте определение ортогональных преобразований. Ортогональны ли преобразования Лоренца? Докажите.

2.2. Укажите способы проверки или доказательства того, что некоторые четыре величины либо образуют, либо не образуют четырехмерный вектор.

2.3. Каким образом доказывается инвариантность скалярного произведения четырехмерных векторов?

2.4. Почему при переходе от одной системы координат к другой нельзя выразить электрическое поле через электрическое, а магнитное — через магнитное? Почему эти поля «смешиваются» между собой?

2.5. Если в некоторой системе координат поле чисто электрическое, то каким основным свойством характеризуется магнитное поле, которое наряду с электрическим наблюдается в другой системе координат? Расскажите о методике применения инвариантов преобразований при рассмотрении задач такого типа.

2.6. В какой системе координат сила Лоренца сводится к чисто электрической? Можно ли выбрать такую систему координат, где сила была бы чисто магнитной? При каких условиях?

2.7. Какие инварианты преобразований Лоренца необходимо использовать, чтобы доказать инвариантность плоской волны? Каким образом?

2.8. Из каких соображений следует, что движущийся магнитный момент обладает также и дипольным электрическим моментом?

2.9. Каким образом объясняется возникновение ЭДС индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле, в системе координат, связанной с проводником?

2.10. Почему два параллельных проводника, электрические токи в которых имеют одинаковое направление, притягиваются, а два параллельных пучка электронов, скорости которых равны, отталкиваются?

2.11. Если в системе координат, связанной с электрическим зарядом, имеется лишь электрическое поле, а магнитное поле появляется только при переходе в систему координат, в которой заряд движется, причем электрическое поле этой системы продолжает существовать, то нельзя ли отсюда сделать заключение о фиктивном характере магнитного поля? Приведите доказательство того, что магнитное поле столь же реально, как и электрическое. Откуда следует, что электрическое и магнитное поля существуют независимо от зарядов, которые их породили?

2.12. Какими свойствами должны обладать векторы электромагнитного поля в некоторой точке для того, чтобы подходящим выбором системы координат поле в этой точке было сведено к чисто электрическому?

2.13. Какими свойствами должны обладать векторы электромагнитного поля в некоторой точке для того, чтобы подходящим выбором системы координат поле в этой точке было сведено к чисто магнитному?

2.14. Поскольку плотность заряда не является инвариантом, нельзя ли найти такую систему координат, где она равна нулю, хотя в другой системе координат она отлична от нуля? Обоснуйте свой ответ формулами.

### 3. Основные типы задач и методы их решения

#### а) Классификация

**3.1.** Зная величины, характеризующие электромагнитное поле в некоторой системе координат, найти соответствующие величины в другой системе координат, движение которой относительно первой известно.

**Метод решения.** Прямое использование формул преобразования величин, характеризующих электромагнитное поле.

**3.2.** Величины, характеризующие электромагнитное поле, заданы в некоторой системе координат. Выяснить, существует ли система координат, в которой электромагнитное поле обладает какими-то специфическими свойствами, и если существует, то найти эту систему координат.

**Метод решения.** Использование инвариантов преобразований Лоренца и формул преобразования величин, характеризующих электромагнитное поле.

#### б) Примеры

##### *I-й тип задач (3.1)*

**3.1.1.** Вблизи поверхности земли имеется электрическое поле, направленное приблизительно вертикально, и магнитное поле, угол которого с вертикалью зависит от широты. Вблизи магнитных полюсов это поле можно считать вертикальным. Какое электромагнитное поле будет наблюдаться в самолете, летящим горизонтально со скоростью  $v$  в районе магнитного полюса? Какое поле будет наблюдаться в пикирующем по вертикали самолете?

**Решение.** Направляя ось  $Z$  по вертикали к земле, находим следующее выражение электромагнитного поля в неподвижной системе координат:

$$E_x=0, E_y=0, E_z \neq 0, B_x=0, B_y=0, B_z \neq 0.$$

В системе координат, связанной с горизонтально летящим в направлении оси  $X$  самолетом, имеем

$$E'_x=E_x=0, \quad B'_x=B_x=0,$$

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -vB_z, B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{v}{c^2} E_z,$$

$$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx E_z, B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx B_z.$$

В системе координат, связанной с самолетом, пикирующим со скоростью  $v$  в направлении отрицательных значений оси  $Z$ , имеем

$$E'_z = E_z, \quad B'_z = B_z,$$

$$E'_x = \frac{E_x + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0, \quad B'_x = \frac{B_x - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0,$$

$$E'_y = \frac{E_y - vB_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0.$$

Таким образом, в первом случае появляются дополнительные электрическое и магнитное поля, направленные перпендикулярно скорости самолета, во втором случае поле остается неизменным.

**3.1.2.** Найти поле равномерно движущегося точечного заряда  $e$ .

Решение. Будем считать заряд покоящимся в начале штрихованной системы координат. Последняя движется в направлении положительных значений  $x$  со скоростью  $v$ . В штрихованной системе координат поле — кулоновское:

$$E' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3}, \text{ т. е. } E'_x = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}};$$

$$E'_y = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}},$$

$$E'_z = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}},$$

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0.$$

Переход в нештрихованную систему координат осуществляется с помощью формул для преобразования полей и координат. Получаем ( $\beta = v/c$ ):

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{i(x - vt) + jy + kz}{[(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}].$$

## II-й тип задач (3.2)

**3.2.1.** Имеется электромагнитное поле, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в котором взаимно перпендикулярны. Найти такую систему координат, в которой поле принимает простейший вид.

**Решение.** Примем во внимание инварианты преобразований  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = \text{const}$ ,  $E^2 - c^2 B^2 = \text{const}$ . Первый инвариант равен нулю. Следовательно, во всех других системах координат векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  должны быть взаимно перпендикулярны либо один из них равен нулю. Одновременное их равенство нулю исключается, так как это означало бы, что в этой системе координат плотность электромагнитной энергии равна нулю.

Из второго инварианта заключаем, что возможны три случая:

а) если  $E^2 - c^2 B^2 > 0$ , то существует система координат, в которой  $B = 0$  и поле чисто электрическое;

б) если  $E^2 - c^2 B^2 < 0$ , то существует система координат, где  $\mathbf{E} = 0$  и поле чисто магнитное;

в) если  $E^2 - c^2 B^2 = 0$ , то во всех системах координат присутствует как электрическое, так и магнитное поле, которые взаимно перпендикулярны. Это случай плоской волны.

Для нахождения указанных систем координат и полей необходимо решить уравнения, получающиеся из формул преобразования полей. Пусть поле  $\mathbf{E}$  направлено вдоль оси  $Y$ , а поле  $\mathbf{B}$  — вдоль оси  $Z$ , т. е.  $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Тогда, например, для случая (а) получаем уравнения

$$B'_x = B_x = 0,$$

$$B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0,$$

$$B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0.$$

Первое и второе уравнения этой системы удовлетворяются тождественно, а третье уравнение есть уравнение для определения скорости движения  $v$ :

$$v = c^2(B/E),$$

т. е. штрихованная система должна двигаться в направлении положительных значений оси  $X$  с указанной скоростью. В рассматриваемом случае  $E^2 - c^2 B^2 > 0$  означает, что  $v < c$ , как это и должно быть. Электрическое поле в штрихованной системе координат должно быть найдено по формулам преобразования полей. Его абсолютная величина непосредственно получается также из инвариантности  $E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2$

$$E' = \sqrt{E^2 - c^2 B^2} \quad (B' = 0).$$

Аналогично рассматривается и случай (б):

$$v = E/B, \quad B' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 B^2 - E^2}.$$

#### 4. Контрольные вопросы

4.1. Что такое ковариантная и инвариантная величина?

4.2. В чем состоит критерий возможности существования такой системы координат, в которой электромагнитное поле представляется либо как чисто магнитное, либо как чисто электрическое?

4.3. Если в некоторой системе координат поле лишь чисто электрическое или лишь чисто магнитное, то каким общим свойством будет обладать в этом случае электромагнитное поле во всех других системах координат?

4.4. Если в некоторой системе координат поле чисто магнитное, то существует ли такая система координат, в которой оно чисто электрическое? Почему? Возможна ли обратная ситуация — переход от чисто электрического поля к чисто магнитному?

4.5. Какое влияние релятивистское изменение массы со скоростью оказывает на движение заряженных частиц в однородном магнитном поле?

4.6. Докажите по формулам преобразования для плотности тока, что движущийся круговой ток обладает дипольным электрическим моментом. Какова связь между магнитным моментом тока и его дипольным электрическим моментом?

4.7. В однородном магнитном поле заряд движется по окружности постоянного радиуса с постоянной по абсолютной величине скоростью. При этом не производится никакой работы. Однако если это движение рассмотреть из другой системы координат, то окажется, что абсолютная величина скорости заряда меняется и работа производится. Разъясните суть дела.

4.8. Магнитный момент элементарной частицы взаимодействует с магнитным полем и дает соответствующую энергию взаимодействия. В атоме водорода электрон, обладающий магнитным моментом, обусловленным его спином, движется в электрическом кулоновском поле ядра. Каким образом в этом случае возникает энергия взаимодействия, обусловленная существованием спина электрона?

## 5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Космический протон с энергией  $10^{14}$  эВ движется перпендикулярно земному магнитному полю силой  $5 \cdot 10^{-6}$  Тл. Какова величина электрического поля в системе координат, связанной с протоном?

Ответ.  $1,6 \cdot 10^8$  В/м.

5.2. Точечный заряд  $e$  движется вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$ . Чему равно создаваемое им электрическое и магнитное поля в точке, характеризуемой радиусом вектором  $\mathbf{r}$ , который образует с осью  $X$  угол  $\alpha$ , в тот момент времени, когда заряд находится в начале координат?

$$\text{Ответ. } E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}},$$

$$\mathbf{B} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n}_0}{r^2} \frac{\beta (1 - \beta^2) \sin \alpha}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}},$$

где  $\mathbf{n}_0$  — единичный вектор в направлении  $[\mathbf{i} \times \mathbf{r}]$ , т. е.  $\mathbf{n}_0 = [\mathbf{i} \times \mathbf{r}] / |[\mathbf{i} \times \mathbf{r}]|$ .

5.3. Пусть имеется бесконечная прямая равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда  $\tau$ . Найти электрическое поле, создаваемое этой нитью на расстоянии  $r$  от нее а) когда она покоится, б) когда она движется вдоль своей длины со скоростью  $v$ .

Ответ. Электрическое поле направлено перпендикулярно нити и равно

$$\text{а) } \tau/2\pi\epsilon_0 r; \quad \text{б) } \tau/2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

5.4. Пусть имеются две бесконечные прямые нити, равномерно заряженные, с линейной плотностью  $\tau$ . Расстояние между нитями  $r$ . Вычислить электрическую силу отталкивания между нитями на единицу длины в системе координат а) где нити покоятся, б) где нити движутся вдоль своей длины со скоростью  $v$ .

$$\text{Ответ. а) } \tau^2/2\pi\epsilon_0 r; \quad \text{б) } \tau^2/2\pi\epsilon_0 r (1 - \beta^2).$$

5.5. В условиях задачи 5.4 вычислить а) силу магнитного притяжения между движущимися нитями, приходящуюся на единицу длины; б) результирующую силу отталкивания с учетом силы электрического отталкивания движущихся нитей (5.4) и силы магнитного притяжения между ними (см. 5.5 а). Что означает полученный результат?

$$\text{Ответ. а) } \tau^2 v^2 / 2\pi\epsilon_0 r c^2 (1 - \beta^2); \quad \text{б) } \tau^2 / 2\pi\epsilon_0 r,$$

т. е. сила магнитного притяжения между движущимися заряженными нитями существует независимо и одновременно с силой электрического отталкивания между ними.

5.6. Пусть в плоскости  $(Y, Z)$  имеются электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Найти такую систему координат, в которой электрическое и магнитное поля были бы параллельными.



Ответ. Параллельность электрического и магнитного полей означает, что в новой системе координат должно выполняться условие

$$E'_y/E'_z = B'_y/B'_z.$$

Это есть уравнение для определения скорости штрихованной системы координат в направлении оси  $X$ . Решение уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|} [(E^2 + c^2 B^2) \pm \\ &\pm \sqrt{(E^2 - c^2 B^2)^2 + 4c^2 |\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}|^2}] = \\ &= \frac{1}{2|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|} [(E^2 + c^2 B^2) \pm \\ &\pm \sqrt{(E^2 + c^2 B^2)^2 - 4c^2 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}|^2}]. \end{aligned}$$

Должно быть выбрано то решение, для которого  $v < c$ . Кроме того, следует отметить, что имеется бесконечное множество других решений. В самом деле, если найдено решение, при котором  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$  параллельны и лежат в плоскости  $(Y, Z)$ , то можно добавить произвольную скорость в этом направлении. Она не изменит параллельности векторов  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{B}'$ .

**Цена 40 коп.**